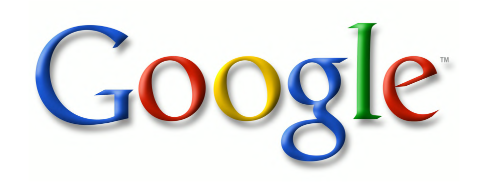
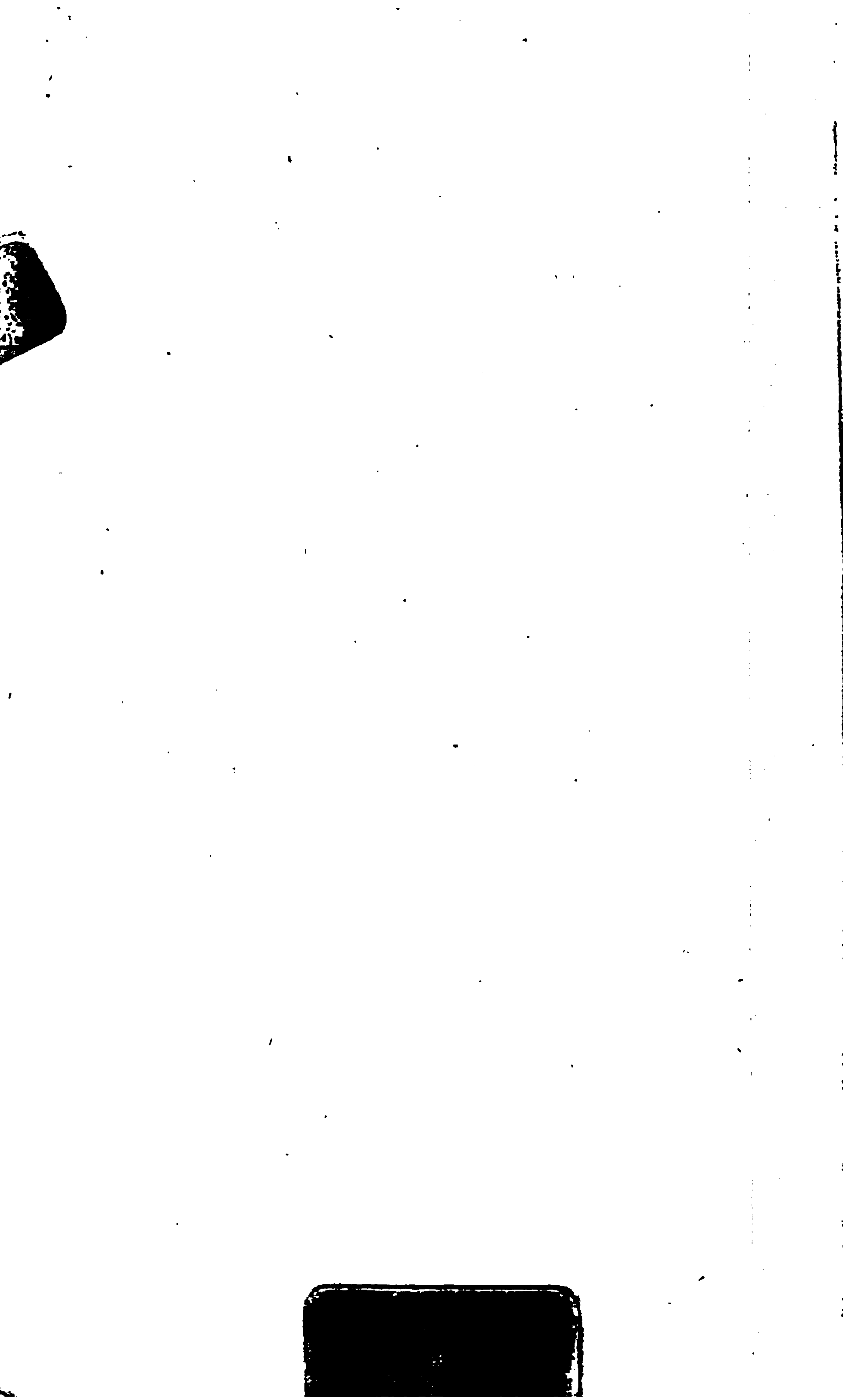





Hachette
STN

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE.

Hachette, Jean Nicolas Pierre, 1769-18

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE,

A L'USAGE

DES ÉLÈVES DE CETTE ÉCOLE;

PAR M. HACHETTE.

Janvier 1814 — Janvier 1816.

TOME TROISIÈME.



PARIS,
Chez Mme Ve COURCIER, Impr.-Lib. pour les Mathématiques et la Marine, quai des Augustins, n° 57.
1816.

c. R.

DE L'IMPRIMERIE DE Mme Ve COURCIER.

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Publiée par M. Hachette.

IIIe. Volume.

N°. Ier. *Janvier* 1814.

§. I.

GÉOMÉTRIE.

Par M. Brianchon, *capitaine d'artillerie.*

Tulle, 23 mai 1813.

On a déja fait connaître dans ce Recueil (tom. II, pag. 383–387), quelques-unes des conséquences auxquelles conduit le théorême donné par *Pascal*, sous le nom d'*hexagone mystique*. Voici de nouvelles remarques sur le même sujet.

Ayant une courbe plane, rapportée à deux axes quelconques, inclinons toutes ses ordonnées d'une même quantité angulaire, en les faisant pivoter, chacune, sur son pied, et dans le même sens; et cherchons les propriétés de la nouvelle courbe que détermine ce deuxième système d'ordonnées.

Pour cela, concevons qu'à tous les points du plan répondent des ordonnées qui suivent le même mouvement que celles de la courbe primitive, et désignons par A, B, C, D,.... ceux du premier système, et par a, b, c, d,..... leurs homologues dans le deuxième, respectivement. Puisque, par hypothèse, les points A, B, C, D,..... ont décrit des arcs de cercle semblables Aa, Bb, Cc, Dd,...... il est évident, 1°. que deux droites homologues, comme AB, ab, se croisent sur la ligne même des abscisses;

en sorte que si A et B sont sur la courbe donnée, et qu'on les y fasse glisser l'un vers l'autre jusqu'à ce qu'ils se confondent en un seul point, les sécantes AB, ab, se changeront en deux tangentes correspondantes qui n'auront pas cessé de se couper sur l'axe des x; 2°. que si R est le point de concours des droites AB, CD, et r celui de leurs homologues ab, cd, R et r seront deux points correspondans; 3°. que ceux d'entre les points A, B, C, D,..... R,.... qui, dans le système primordial, étaient situés sur une même droite, conserveront la même disposition rectiligne dans le système déformé. Par exemple : soit pris, à volonté, six points A, B, C, D, E, F sur la première courbe, et, sur la deuxième, cherchons leurs homologues a, b, c, d, e, f; les deux hexagones $ABCDEF$, $abcdef$, seront tels que, si, pour l'un d'eux, les trois points de concours des côtés opposés sont placés en ligne droite, l'autre jouira de la même propriété, c'est-à-dire que, si on a opéré sur une conique, la déformation indiquée n'en aura pas changé la nature, et les deux courbes seront du même ordre.

Etant donnée une courbe, traçons-en une deuxième qui coupe en parties proportionnelles toutes les ordonnées de la première; et, nommant toujours A, B, C, D,...... les points du premier système, et a, b, c, d,..... leurs homologues dans le deuxième, respectivement, nous trouverons dans les deux courbes actuelles des propriétés analogues à celles de la construction précédente. 1°. Les deux droites correspondantes AB, ab, iront se rencontrer sur la ligne des abscisses; et, de même, si l'on appelle *tangentes correspondantes* celles qui sont menées par deux points homologues, A, a, l'une touchant la première courbe en A, l'autre touchant la deuxième en a, deux pareilles tangentes se croiseront aussi sur l'axe des x; 2°. le point d'intersection de deux lignes quelconques du système donné a pour homologue, dans le système déformé, le point d'intersection des deux lignes correspondantes; 3°. si la courbe primitive est une conique, la déformée sera de même nature, ainsi qu'on le démontre par la considération des hexagones inscrits. Cette dernière propriété, même est indépendante du parallélisme, que, jusqu'ici, nous avons supposé aux ordonnées, lesquelles pourraient être concourantes et réunies en faisceau; c'est-à-dire que : « Si d'un « point, pris à volonté sur le plan d'une conique, on tire tant « de droites qu'on voudra qui aillent se terminer à la courbe, « et qu'on les divise toutes dans un même rapport, l'ensemble « des points de division formera une nouvelle conique semblable « à la première. »

On emploie souvent dans les arts graphiques les deux modes

de déformation de courbe que nous venons d'exposer. Le premier s'effectue en *balançant* ou faisant osciller toutes les ordonnées sur leurs bases ; le deuxième, en augmentant ou diminuant proportionnellement toutes ces ordonnées, qui, dans ces variations, demeurent constamment parallèles entr'elles. Dans l'un et l'autre cas, les tangentes se déplacent en tournant, chacune, autour d'un point fixe déterminé par l'axe des abscisses.

Appliquons ces considérations générales à un exemple remarquable : $ABXY$ étant (pl. 1, fig. 1) une circonférence de cercle rapportée à deux axes rectangulaires OA, OX, qui partent de son centre O ; augmentons proportionnellement toutes ses ordonnées, et nous obtiendrons l'ellipse concentrique $abXy$, dont les deux demi-axes sont Oa, OX. —— a et b sont, respectivement, les homologues de A et B ; ainsi, les sécantes ab, AB se rencontreront, en H, sur l'axe des x, et les tangentes menées en b et B se couperont aussi sur cet axe OX en K ; enfin, les deux angles correspondans acb, ACB, ont leurs sommets c, C, situés sur la même ordonnée ; partant, $ac = AC$.

Quoique la seule inspection de la figure apprenne que, d'après la théorie des lignes proportionnelles, $ac = AC$, $yd = YD$, nous allons cependant présenter ce résultat sous un nouveau jour en le rattachant à l'hexagone, ou plutôt à l'une des conséquences immédiates de l'hexagone de Pascal. La voici.

« Soient (fig. 2) deux triangles (ABC, abc) tels, qu'en joignant « leurs sommets deux à deux par des droites (Aa, Bb, Cc) « allant de l'un à l'autre, ces trois droites de construction con- « courent en un même point (S) : si l'on combine deux à deux, « et dans le même ordre, les côtés opposés aux sommets ainsi « appariés, et qu'on les prolonge suffisamment, les trois points « d'intersection résultans (H, I, K) seront distribués sur une « même ligne droite ». —— Réciproquement : « Lorsque deux « triangles (ABC, abc) sont tellement placés que, en com- « binant chacun des côtés du premier avec un de ceux du deuxième, « pour avoir leur point de concours, ces trois points de construc- « tion (H, I, K) se trouvent sur un même alignement : si, par « des droites, on joint deux à deux, et dans le même ordre, « les sommets opposés aux côtés ainsi appariés, ces droites, au « nombre de trois (Aa, Bb, Cc), se croiseront toutes en un « même point (S). » Cela posé, revenons à la figure 1re., et menons AC et ac parallèlement à HK. Les points H, I, K étant ici en ligne droite, les deux triangles ABC, abc sont dans le cas de la figure 2, et par conséquent, les trois droites Aa, Bb, Cc, sont concourantes ; mais le point vers lequel elles tendent toutes, est situé à l'infini, puisque, par construction, Aa et Bb sont paral-

lèles entr'elles; donc Cc est aussi parallèle à l'axe des y, et; ainsi, $ac = AC$. On prouverait de la même manière que $yd = YD$.

Or, par les propriétés du cercle (fig. 1) : $BC = AC$, $BD = YD$, et le triangle COD, rectangle en O, donne $BC \times BD = \overline{OB}^2$, ou $AC \times YD = \overline{OB}^2 = \overline{OX}^2$, ou enfin, $ac \times yd = \overline{OX}^2$; équation qu'on traduit par cet énoncé : « Si on mène aux extré« mités (a, y) du grand axe d'une ellipse des perpendiculaires « à cet axe, le rectangle $(ac \times yd)$ formé des parties de ces « perpendiculaires, comprises entre ce même axe et une tangente « quelconque à la courbe, sera une quantité constante $(\overline{OX}^2)$, « égale au carré du demi-petit axe. » Cette proposition est tirée des coniques d'*Appollonius*; et *Lagrange* s'en est servi dans sa *Théorie des Fonctions analytiques*.

Du centre de similitude de deux courbes semblables; par M. MONGE.

Deux courbes quelconques du deuxième degré étant données par leurs équations,

$$A x^2 + B y^2 + 2 C xy + 2D x' + 2 E y - 1 = 0,$$
$$A' x^2 + B' y^2 + 2 C' xy + 2D' x + 2 E' y - 1 = 0,$$

rapportées aux mêmes axes et à la même origine; pour que les deux courbes soient semblables entr'elles et semblablement placées, il faut que l'on ait

$$AC' - A'C = 0,$$
$$BC' - B'C = 0;$$

et par conséquent $\quad AB' - A'B = 0.$

Le centre de similitude directe et celui de similitude opposée seront sur la droite qui passe par les centres de figures des deux courbes proposées; cela posé, si l'on nomme α et β les coordonnées d'un de ces centres de similitudes, et m le quotient de la distance de ce centre de similitude au centre de la première des courbes, divisée par la distance des deux centres de figure, en faisant pour abréger

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\,CDE - AE^2 - BD^2 - (AB - C^2) = H, \\ 2CD'E' - AE'^2 - BD'^2 - \dfrac{C'}{C}(AB - C^2) = H', \end{array} \right.$$

on aura $\quad C^2H' = C'^2H\,(m-1)^2,$

ou $$m = 1 + \frac{C}{C'}\sqrt{\frac{H'}{H}},$$

et $$\alpha = \frac{(C'E - B'D)(m-1) + CE' - BD'}{m(AB' - CC')},$$

$$\beta = \frac{(C'D - A'E)(m-1) + CD' - AE'}{m(AB' - CC')}.$$

Comme la quantité m a deux valeurs, suivant que l'on substituera l'une ou l'autre dans les valeurs de α et β, on aura les coordonnées des deux centres de similitude, dont l'un sera au-delà des deux centres de figures, et dont l'autre sera entre les deux.

(*Voyez* l'application de cette théorie du centre de similitude, dans le Traité des surfaces du second degré, vol. in-8°., pag. 194, édition 1813.)

Démonstration d'un théorème (*) *de Trigonométrie sphérique ; par* M. Cornely (**).

Dans un triangle sphérique ABC (pl. 1, fig. 3), les trois arcs de grands cercles AO, BO', CO'', abaissés des sommets A, B, C perpendiculairement sur les côtés opposés, se coupent en un même point I.

Cela revient à démontrer que les trois plans (fig. 4) SAO, SBO', SCO'', menés par les trois arêtes SA, SB, SC, perpendiculairement aux faces respectivement opposées, se rencontrent suivant une même droite SI. En effet, concevons par le point c un plan perpendiculaire à l'arête SC, et soit abc, l'intersection de ce plan avec la pyramide; le plan de la face SBC est perpendiculaire au plan du triangle abc, et au plan SAO, ou Sao, mené par l'arête SA perpendiculairement à la face opposée à cette arête; donc il est perpendiculaire à l'intersection commune ao de ces deux plans; d'où il suit que les deux droites ao et bc, situées sur le plan abc, sont perpendiculaires entr'elles.

On prouve de la même manière que la droite bo', intersection de la face ASC et du plan SBO' perpendiculaire à cette face, coupe à angle droit le côté ac du triangle abc. Les perpendiculaires abaissées des trois sommets a, b, c du triangle rectiligne abc, se

---

(*) L'auteur de ce théorème est M. de Stainville, qui l'a démontré par l'analyse, dans un Recueil de problêmes, qu'il a publié à Paris, en 1809, 1 vol. in-8°.

(**) Les auteurs des cinq articles suivans de géométrie, ont été admis à l'Ecole Polytechnique, en 1812.

coupent en un même point i ; d'où il suit que la droite cio'' est perpendiculaire au côté ab de ce triangle, et a cause de Sc perpendicnlaire au plan abc, le plan du triangle Sco'' ou du triangle SCO'' est perpendiculaire au plan de la face ASB, opposée à l'arête SC ; donc les trois plans SAO, SBO', SCO'' passent par la même droite SiI, et (fig. 3) les trois perpendiculaires AO, BO', CO'' passent par le même point I.

Proposition de Géométrie, démontrée par M. Chasles.

« Si par un point quelconque H (fig. 5, pl. 1), de l'une des « diagonales d'un quadrilatère gauche ou plan $ABCD$, on mène « deux droites dont l'une coupe les côtés AB, AD, et l'autre les « côtés BC, CD, on aura

$$AI.BM.CK.DN = AN.DK.CM.BI.$$

En effet, les trois points H, I, N étant en ligne droite, on a dans le triangle ABD (Correspondance, 2ᵉ. volume, page 258),

$$HB.AI.DN = HD.AN.BI.$$

On a de même dans le triangle BDC,

$$HD.CK.BM = HB.CM.DK;$$

multipliant ces deux équations membre à membre, on obtient

$$AI.BM.CK.DN = AN.DK.CM.BI.$$

Il est clair que si réciproquement cette équation a lieu, les deux droites NI, KM se couperont en un même point H de la diagonale BD prolongée. Donc les deux droites KI, MN seront toujours dans un même plan KHN, et se couperont en un point G. Cette démonstration doit être ajoutée au théorême de M. Chasles, page 446 du tome 2 de la Correspondance.

Démonstration de quelques Théorêmes de géométrie; par M. Giorgini.

Désignons par a, b, c les trois distances (fig. 6, pl. 1) OA, OB, OC, auxquelles un plan ABC coupe trois axes rectangulaires OX, OY, OZ ; l'équation de ce plan, par rapport à ces trois axes, sera

$$\frac{1}{a}x + \frac{1}{b}y + \frac{1}{c}z = 1. \qquad (1)$$

Représentons de plus par (x), (y), (z) les angles que le plan BAC forme avec les trois axes des x, des y et des z, et par (x, y), (x, z), (y, z) les angles de ce même plan avec ceux des x, y ; x, z ; y, z ; les angles (z), (y), (x) seront respectivement les complémens des angles (x, y), (x, z), (y, z) ; de sorte que l'on aura

$$\sin(z) = \cos(x, y), \quad \sin(y) = \cos(x, z), \quad \sin(x) = \cos(y, z).$$

De l'origine des coordonnées O, abaissons sur le plan BAC une perpendiculaire $OH = p$, et joignons A, H ; le triangle OAH, rectangle en H, donnera $OH = OA \sin OAH$, ou bien,

$$p = a \sin(x);$$

d'où
$$\frac{1}{a} = \frac{\sin(x)}{p} = \frac{\cos(y, z)}{p},$$

et par suite aussi
$$\frac{1}{b} = \frac{\sin(y)}{p} = \frac{\cos(x, z)}{p},$$
$$\frac{1}{c} = \frac{\sin(z)}{p} = \frac{\cos(x, y)}{p}.$$

L'équation du plan deviendra donc

$$x \sin(x) + y \sin(y) + z \sin(z) = p, \qquad (2)$$

ou bien
$$x \cos(y, z) + y \cos(x, z) + z \cos(x, y) = p. \qquad (3)$$

Cela posé, l'équation (2) démontre que la somme des trois perpendiculaires abaissées des trois projections d'un même point M du plan BAC, sur ce même plan, est égale à la perpendiculaire abaissée de l'origine des coordonnées, et par conséquent « que « la somme des trois pyramides ayant pour base commune une « figure tracée dans un plan, et pour sommets les trois projec- « tions de ce point sur les trois plans des coordonnées, est égale « à une pyramide de même base, et qui aurait pour sommet l'ori- « gine des coordonnées. »

En effet de la projection P du point M sur le plan des x, y, abaissons, sur le plan BAC, la perpendiculaire PK, et joignons M, K ; le triangle MPK, rectangle en K, nous donnera, $PK = MP \sin PMK = z \sin(z)$; d'après cela, si l'on représente la perpendiculaire PK par π, et par π', π'' les deux perpendiculaires abaissées des deux autres projections du point M, nous aurons

$$\pi = z \sin(z), \quad \pi' = y \sin(y), \quad \pi'' = x \sin(x),$$

et par suite d'après l'équation (2),

$$s + s' + s'' = p,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Quant à l'équation (3), elle démontre ce théorême de M. Monge :
« La somme des trois pyramides ayant pour sommet commun « un point du plan, et pour base les trois projections d'une « figure plane, est égale à la pyramide ayant son sommet à l'ori- « gine, et pour base cette figure. » En effet, le plan *BAC* étant le plan d'une figure dont l'aire serait représentée par *F*, multipliant l'équation (3) par $\frac{1}{3}$ *F*, nous aurons

$$\tfrac{1}{3}x.F\cos(y,z) + \tfrac{1}{3}y.F\cos(x,z) + \tfrac{1}{3}z.F\cos(x,y) = \tfrac{1}{3}p.F:$$

or, $\frac{1}{3}p.F$ est la solidité de la pyramide ayant son sommet à l'origine, et pour base la figure plane; et les expressions $F\cos(y,z)$, $F\cos(x,z)$, $F\cos(x,y)$ représentant les trois projections de la figure *F*, les trois termes du premier membre représenteront les trois pyramides ayant pour sommet un point du plan, et pour base ces trois projections.

Nous allons voir tout-à-l'heure que ce dernier théorême n'est qu'un cas particulier d'un autre plus général, et que nous énoncerons après avoir expliqué ce que nous entendrons par projection de l'ordre *n*.

La figure *F* projettée sur les trois plans des coordonnées donnera les projections du premier ordre de cette figure; si de nouveau l'on projette les projections du premier ordre sur le plan de la figure, on aura trois nouvelles figures, qui, projettées sur les trois plans des coordonnées, donneront les projections du second ordre : on passera de même des projections du second ordre aux projections du troisième, ainsi de suite. D'après cette construction, il est clair que les projections de l'ordre *n* seront au nombre de 3^n, et je dis

« Que la pyramide ayant son sommet à l'origine et pour base « une figure plane, est égale à la somme des 3^n pyramides ayant « pour sommet commun un point du plan de la figure, et pour « base les 3^n projections de l'ordre *n* de la figure. »

Pour démontrer ce théorême, nous allons d'abord faire voir que si l'on projette sur le plan de la figure les projections d'un ordre quelconque, la somme des figures qui en résulteront sera toujours égale à la figure donnée. En effet, considérons d'abord les projections du premier ordre de la figure *F*: elles ont pour expression

$$F.\cos(y,z), \quad F.\cos(x,z), \quad F.\cos(x,y),$$

et leurs projections f, f', f'' sur le plan de la figure seront :

$$f = F\cos^2(y, z), \quad f' = F\cos^2(x, z), \quad f'' = F\cos^2(x, y),$$

et par suite

$$f + f' + f'' = F(\cos^2(y, z) + \cos^2(x, z) + \cos^2(x, y));$$

et comme

$$\cos^2(y, z) + \cos^2(x, z) + \cos^2(x, y) = 1,$$

il s'en suivra

$$f + f' + f'' = F,$$

ce qui démontre le dernier principe énoncé pour les projections du premier ordre. Pour rendre ce principe tout-à-fait général, il suffira donc de faire voir qu'étant démontré pour les projections de l'ordre $n-1$, il l'est aussi pour les projections de l'ordre n; or, représentons par φ, φ', φ'', etc., les projections sur le plan de la figure des projections de l'ordre $n-1$; à chacune de ces figures répondront trois projections de l'ordre n, qui pourront être regardées comme leurs projections du premier ordre, et qui, d'après ce que nous venons de démontrer, donneront chacune sur le plan de la figure trois projections dont la somme lui sera égale. Si donc à la figure φ répondent les trois ψ, ψ', ψ''; à la figure φ', les trois $\psi_{\prime}$, $\psi_{\prime}'$, $\psi_{\prime}''$, etc., etc., il s'en suivra que

$$\varphi + \varphi' + \text{etc.} = \psi + \psi' + \psi'' + \psi_{\prime} + \psi_{\prime}' + \psi_{\prime}'' + \text{etc.};$$

or, par hypothèse, $\varphi + \varphi' + \text{etc.} = F$;
donc aussi $\psi + \psi' + \psi'' + \text{etc.} = F$,

ce qu'il fallait démontrer.

Cela posé, puisqu'il est généralement démontré que φ, φ', φ'', etc., étant les projections sur le plan de la figure, de ses projections de l'ordre $n-1$, qui sont évidemment au nombre de 3^{n-1}, on a

$$\varphi + \varphi' + \text{etc.} = F;$$

il en résulte que la pyramide ayant son sommet à l'origine, et pour base la figure F, est égale à la somme des pyramides ayant même sommet, et pour base les figures φ, φ', etc.; or, chacune de ces dernières est égale à la somme de trois pyramides ayant pour sommet un point du plan, et pour base ses trois projections du premier ordre, qui sont trois projections de l'ordre n de la figure, il s'ensuivra que la somme de toutes ces pyramides, ou la pyramide, ayant pour sommet l'origine et pour base la figure F, sera égale à la somme de toutes les pyramides ayant leur sommet en un point du plan de la figure, et pour base ses projections de l'ordre n, ce qu'il s'agissait de démontrer.

Solution d'un problême de Géométrie; par M. Olivier,

M. Hachette a communiqué à la Société philomatique (séance du 22 mai 1813) une solution synthétique de ce problême : *Trois circonférences quelconques de grands ou petits cercles, étant tracées sur la surface d'une sphère, trouver une quatrième circonférence tangente aux trois premières.* Ce problême, dont M. Carnot a donné une solution analytique dans sa Géométrie de position, page 415, avait été proposé aux élèves de l'Ecole polytechnique; M. Olivier l'a résolu très-élégamment *en menant, par un point donné, un plan tangent à un cône oblique à base circulaire.* Les trois cercles étant donnés, M. Olivier fait passer par ces cercles pris deux à deux, trois cônes obliques (*voyez* Supplément de la Géométrie descriptive, par M. Hachette, pag. 55), et il ne considère d'abord que les trois cônes dont les sommets sont au-delà des plans des cercles. Il remarque que le plan tangent à deux de ces cônes, est nécessairement tangent au troisième, et qu'il coupe la sphère suivant un quatrième cercle tangent aux trois cercles donnés. Ayant donc déterminé le premier cône, et le sommet du second, on mène par ce sommet deux plans tangens au premier cône, et chacun de ces plans contient un des cercles cherchés; ces deux plans se coupent suivant une droite qui contient les sommets des trois cônes.

Les sommets des cônes obliques qui joignent trois cercles d'une sphère deux à deux, sont distribués sur quatre droites situées dans le même plan. Par chacune de ces droites, on peut mener deux plans tangens à l'un quelconque des trois cônes qui ont leurs sommets sur cette droite; d'où il suit que trois cercles d'une sphère peuvent, en général, être touchés par un quatrième cercle de cette sphère, de huit manières différentes.

Etant données trois courbes planes d'une surface du second degré, on détermine, par des considérations semblables, la quatrième courbe plane qui les touche. En effet, il est évident que lorsque deux surfaces du second degré se coupent, la courbe d'intersection est, en général, composée de deux branches; et si l'une de ces branches est plane, l'autre branche l'est nécessairement. D'où il suit que, par deux courbes planes quelconques d'une surface du second degré, on peut toujours mener une surface conique du second degré. Ayant déterminé les sommets des cônes qui passent par les trois courbes planes données, on achève la solution comme pour les sphères, en menant des plans tangens à ces cônes.

Propositions relatives aux Courbes et aux Surfaces du second degré; par M. Chasles.

1°. « Si, par un point A (fig. 1, pl. 2), pris dans le plan d'une « section conique, on mène deux droites AB, AD, puis les quatre « tangentes RB, RC, TD, TE, et les quatre droites SEC, SDB, « EIB, CID, les quatre points R, S, T, I seront en ligne droite. »

Toute section conique pouvant être regardée comme la perspective d'un cercle, il suffit de démontrer ce théorème pour le cercle. Nous allons donc faire voir que, dans un cercle, les trois points (fig. 2) R, S, I sont en ligne droite; la même démonstration aurait lieu pour les trois points T, S, I.

$$\text{Le triangle}\left\{\begin{array}{c} xSB \\ xCR \\ SBE \\ CEI \\ CIB \end{array}\right\}\text{donne}\left\{\begin{array}{l} SB : Sx :: \sin SxB : \sin SBx, \\ Rx : RC :: \sin RCx : \sin CxR, \\ SE : SB :: \sin SBE : \sin SEB, \\ IC : IE :: \sin CEI : \sin ECI, \\ IB : IC :: \sin ICB : \sin IBC. \end{array}\right.$$

Multipliant ces proportions terme à terme, et observant que $\sin SxB = \sin CxR$, $\sin SBx = \sin ICB$, $\sin RCx = \sin IBC$, $\sin SBE = \sin ECI$, $\sin SEB = \sin CEI$, et $RC = RB$,

on aura $$Rx.SE.IB = RB.EI.Sx;$$

d'où l'on conclut, en considérant le triangle xEB, que les trois points R, S, I sont en ligne droite. Ce qu'il fallait prouver.

2°. Dans le quadrilatère $BCED$ (fig. 1), on a

$$AC : AB :: oC : oB; \qquad AE : AD :: KE : KD,$$

(Théorie des transversales de M. Carnot, théorème 6.)

Les points fixes o, R déterminent la droite oR; d'où résulte ce théorème :

« Si d'un point A, situé dans le plan d'une section conique, « on mène des sécantes AC, AE, ...; les tangentes aux points « B, C; D, E; ... se coupent deux à deux sur une même droite; « les droites BD, CE, ... ainsi que CD, BE, ... se coupent « aussi deux à deux sur cette même droite. »

3°. « Si d'un point A on mène des droites AC, ... et qu'on « prenne des points o, tels que $\frac{AC}{AB} = \frac{oC}{oB}$, les points o seront « sur une droite ».

Cette droite sur laquelle se trouvent les points R, S, T, I, coupe la courbe en deux points m, n, et Am, An sont évidemment tangentes à la courbe. Par conséquent la droite Rn est parallèle au conjugué du diamètre AY. On a

$$Ap : Aq :: Zp : Zq;$$

d'où l'on déduit

$$YA : Yq :: Yq : YZ, \qquad YZ = \frac{\overline{Yq}^2}{AY},$$

Y étant le centre de la surface (*).

4°. « Si on prolonge les tangentes RC, RB jusqu'à ce qu'elles rencontrent la tangente An en F et G, il est clair que les droites FB, GC se couperont sur RS ; d'où l'on voit que :

« Quand les trois côtés d'un triangle touchent une section co-
« nique, les trois droites qui unissent les sommets avec les trois
« points de tangence se coupent en un même point. »

La tangente en m et les droites CB, FG se rencontrent en un même point A, la tangente en B' et les droites Cn, RG se rencontreraient aussi en un même point ; il en serait de même de la tangente en C' et des deux droites Bn, RF ; ces trois points seraient sur une ligne droite parallèle au conjugué du diamètre passant par le point l.

Puisque les troits droites Rn, FB, GC se coupent en un même point l, on a

$$RC.Fn.GB = RB.Gn.FC.$$

Ce théorème étant démontré pour un polygone, il est facile de le prouver pour un polygone d'un côté de plus.

Car soit (fig. 4) un polygone quelconque $ABCDE$; je prolonge EA, BC jusqu'en m : on aura, par hypothèse, dans le polygone $mEDC$,

$$mL.EH.DG.CK = mK.CG.DH.EL :$$

(*) Si $A'Y$ (fig. 3) est le conjugué de AY, on aura semblablement $YZ' = \frac{\overline{Y\pi}^2}{YA'}$.
Supposons que les deux tangentes Am, An soient perpendiculaires entr'elles, on aura $AZ = Zm$, et par suite $AY = YA'$. Ainsi $YZ = \frac{\overline{Yq}^2}{AY}$, $YZ' = \frac{\overline{Y\pi}^2}{AY}$: or on a entre YZ, YZ', Yq, $Y\pi$, la relation $\overline{Yq}^2.\overline{YZ'}^2 + \overline{Y\pi}^2.\overline{YZ}^2 = \overline{Yq}^2.\overline{Y\pi}^2$; d'où l'on déduit $\overline{AY}^2 = \overline{Yp}^2 + \overline{Y\pi}^2$. Le second membre est une quantité constante. Ainsi le sommet A des deux tangentes se meut sur un cercle.

or, dans le triangle mAB, on a

$$mK.BI.AL = mL.AI.BK;$$

multipliant ces deux équations membre à membre, on obtient

$$AL.EH.DG.CK.BI = AI.BK.CG.DH.EL.$$

5°. « La courbe de contact d'un cône et d'une surface du second « degré est plane. »

En effet, par le sommet R (fig. 1) du cône tangent, je mène une droite quelconque qui coupe la surface en deux points m, n, auxquels je conçois les deux plans tangens. Par la droite Rn, je conduis un plan qui coupe la surface suivant la courbe $nCmB$, le cône suivant deux arêtes RC, RB tangentes à la courbe, et les plans tangens suivant deux droites Am, An; la droite BC passera par le point A (4°); de plus, elle coupe Rn en un point o, et on aura $\frac{Rn}{Rm} = \frac{on}{om}$. Ainsi la droite BC passe par un point fixe o, et par la droite intersection des deux plans tangens en m et n, laquelle est aussi fixe; donc cette droite BC est toujours dans le même plan. Donc, etc.

Il résulte de cette démonstration que si, d'un point fixe, on mène des droites qui coupent une surface du second degré, le lieu géométrique de la droite intersection des plans tangens aux points d'intersection d'une même droite, sera un plan.

Il est évident que, par une courbe plane tracée sur une surface du second degré, on peut mener un cône tangent; car si, par trois points de cette courbe on mène trois plans tangens, et qu'on conçoive un cône circonscrit à la surface, et ayant son point d'intersection pour sommet, il touchera la surface suivant une courbe plane qui se confondra avec la courbe donnée, puisque ces deux courbes ont trois points communs.

6°. « Si l'une des courbes d'intersection d'un cône et d'une surface « du second degré est plane, l'autre le sera aussi. »

En effet, suivant la courbe plane qui se projette en CB (fig. 1), je mène un cône tangent à la surface; je joins par une droite le sommet R de ce cône, et le sommet S du cône donné; cette droite rencontre la surface en deux points m, n, auxquels je mène des plans tangens, ils se coupent suivant une droite située dans le plan CB (5°); par la droite RS, je mène un plan que je suppose être celui de la figure; il coupe le cône donné suivant deux arêtes SC, SB, et les plans tangens suivant deux droites mA, nA. Les droites CD, BE se couperont en un point I de RS, et on aura

$\frac{Sm}{Sn} = \frac{Im}{In}$ (3°), la droite ED passera par le point A; de plus, on aura $\frac{So}{Sk} = \frac{Io}{Ik}$. Or, le point o et le point I sont fixes, le point k l'est donc aussi. Ainsi la droite ED passe toujours par un même point k, et une même droite intersection des deux plans tangens en m et n, et par conséquent elle décrit un plan. Donc, etc.

Outre le cône dont le sommet est en S, il y en a un autre dont le point I est le sommet.

7°. « Par deux courbes planes tracées sur une surface du second « degré, on peut faire passer deux cônes. »

Par la droite intersection des plans des deux courbes, je conçois deux plans tangens à la surface, et je joins les deux points de tangence par une droite mn (fig. 1). Par cette droite, je mène un plan que je suppose être celui de la figure; il coupe les plans tangens suivant deux droites Am, An, et les plans des deux courbes suivant deux droites AC, AE, les droites CE, BD se rencontrent en S sur mn prolongée. Si, par le point S, on mène un cône qui ait la courbe BC pour base, il coupera la surface suivant une autre courbe plane, dont le plan passera par les points E, D, et par l'intersection des deux plans tangens en m et n. Donc cette courbe sera la même que la seconde courbe donnée. Ainsi le point S est le sommet d'un cône passant par les deux courbes données. Par la même raison, le point I est le sommet d'un second cône. D'ailleurs, les sommets S et I sont liés entre eux par la relation $\frac{So}{Sk} = \frac{Io}{Ik}$.

Les points R, T étant les sommets des cônes tangens, suivant les courbes CB, DE, on voit que les six points R, T, S, I, m, n sont en ligne droite.

8°. « L'intersection de deux cônes tangens à une surface du « second degré, est une courbe plane dont le plan passe par l'in- « tersection de ceux des courbes de contact. »

Car la droite uv passe par le point fixe I et par un point A de la droite intersection des deux plans de contact.

En combinant deux à deux les trois courbes BC, ED, uv, on voit qu'on peut mener six cônes dont chacun passe par deux de ces courbes. Les sommets de ces six cônes seront sur une même droite.

On déduit de ce qui précède que :

Si, d'un point fixe A (fig. 1), on mène une infinité de droites qui coupent une surface du second degré, et si, sur chacune de ces

droites, on prend un point I, tel que les distances de ce point aux points où la droite coupe la surface, soient proportionnelles aux distances du point fixe aux mêmes points, le point I engendre un plan.

Si, par un point fixe A, on mène une infinité de droites AC, AE,.... et qu'on joigne par des droites CD, BE, ou CE, BD, les points d'intersection de deux quelconques de ces droites avec une surface du second degré, les points I, S engendreront un plan. Ce plan sera le même que le précédent.

Si un cône est tangent à une surface du second degré, et que le plan de contact passe par une droite fixe, le sommet du cône se mouvera sur une droite.

Si le plan de la courbe d'intersection de deux cônes tangens à une surface du second degré passe toujours par une même droite, les sommets des deux cônes engendreront une droite.

Si, par deux sections planes d'une surface du second degré, on fait passer deux cônes, leurs sommets engendreront une droite, quand les plans des deux courbes passeront par une droite fixe.

Si, à une droite fixe, on substitue un point fixe, le lieu géométrique des sommets des différens cônes que nous venons de considérer, sera un plan.

Si, par un point, on mène un cône tangent à une surface du second degré, et un autre cône quelconque qui coupe la surface suivant deux courbes planes semblables à la courbe de contact, et que, par ces deux courbes, on fasse passer un second cône, son sommet sera en un point fixe sur le diamètre qui passe par le point donné.

9°. Soient (fig. 5) A, C les sommets de deux cônes tangens à une surface du second degré; B, D deux points de leur courbe d'intersection; m, q, n, p les points où les arêtes AB, AD, CB, CD touchent la surface, les trois droites mq, np, BD se couperont en un même point I de BD, par conséquent on aura

$$Am.Bn.Cp.Dq = Aq.Dp.Cn.Bm.$$

Cette équation a lieu, quel que soit le quadrilatère $ABCD$.

Il est facile de l'étendre à un polygone quelconque. Donc,

« Si tous les côtés d'un polygone plan ou gauche touchent une
« surface du second degré, on aura deux segmens sur chaque
« côté, ou sur son prolongement; le produit de tous ces segmens,
« qui n'ont pas d'extrémité commune, est égal au produit de tous
« les autres. »

10°. « Une courbe plane quelconque est tracée sur une surface

« du second degré ; on la projette sur un plan par un cône ayant « son sommet en un point de la surface pour lequel le plan tangent « est parallèle au plan de projection, la projection de cette « courbe sera une courbe semblable à celle qu'on obtiendrait en « coupant la surface par un plan parallèle à celui de projection. »

En effet, soient C, C', deux courbes qu'on obtient en coupant la surface par deux plans parallèles à celui de projection. Par la courbe C' et la courbe plane A tracée sur la surface, je fais passer un cône, il rencontrera le plan de projection suivant une courbe B semblable à la courbe C', et par conséquent à la courbe C. Or, le plan sécant qui donne la courbe C', se mouvant parallèlement à lui-même, et s'approchant indéfiniment du plan tangent, la courbe B variera ; mais sera toujours semblable à la courbe C. Donc, à la limite, c'est-à-dire au point où le plan sécant devient tangent, la courbe B est encore semblable à la courbe C.

Ce qu'il fallait démontrer.

Il résulte delà que, dans les paraboloïdes il existe un plan sur lequel toutes les sections planes se projetent orthogonalement, suivant des courbes semblables. Ce sont des ellipses ou des hyperboles, suivant que le paraboloïde est elliptique ou hyperbolique (*).

PROBLÊME.

« Mener sur une surface du second degré une courbe plane, « tangente à trois autres courbes planes tracées sur cette sur- « face. »

Par les trois courbes, on menera trois cônes qui aient pour sommet commun un point de la surface, tel qu'un plan sécant parallèle au plan tangent en ce point, donne un cercle pour section. On coupera les trois cônes par un plan parallèle à ce plan tangent ; on aura pour sections, trois cercles auxquels on menera un quatrième cercle tangent. On considérera ce cercle comme la base d'un cône ayant même sommet que les trois autres. Il est évident que ce cône tangent à ces trois-ci, coupera la surface, suivant un courbe plane tangente aux trois courbes proposées.

Ce problême admet huit solutions, puisque trois cercles tracés sur un plan peuvent être touchés par un quatrième cercle de huit manières différentes.

On résoudra semblablement, par rapport aux contacts des courbes planes, tracées sur une surface du second degré, les problêmes relatifs aux contacts des courbes tracés sur un plan.

(*) Cette proposition a été démontrée pag. 330, vol. 2 de la Correspondance.

Soient A, B, C trois courbes planes tracées sur une surface du second degré : par A et B, on pourra faire passer deux cônes, l'un extérieur, que je représente par (ab), l'autre intérieur $(a'b')$: De même A et C donneront deux cônes (ac), $(a'c')$, B et C, deux autres cônes (bc), $(b'c')$. Soient γ, γ', β, β', α, α', les sommets respectifs de ces six cônes. Chacune des huit courbes qui touchent les trois courbes A, B, C est dans un plan tangent à trois des six cônes, et ces trois cônes seront tous les trois extérieurs, ou deux seront intérieurs, et le troisième extérieur ; ce qui donne les quatre systêmes

$$\begin{array}{lll} (ab), & (ac), & (bc), \\ (ab), & (a'c'), & (b'c'), \\ (a'b'), & (a'c'), & (bc), \\ (a'b'), & (ac), & (b'c'), \end{array}$$

à chacun desquels correspondent deux courbes planes tangentes aux trois courbes A, B, C. Les sommets des trois cônes de chacun de ces systêmes se trouvent donc sur l'intersection de deux plans, et par conséquent en ligne droite. Ainsi

$$\text{les points} \left\{ \begin{array}{lll} \gamma, & \beta, & \alpha, \\ \gamma, & \beta', & \alpha', \\ \gamma', & \beta', & \alpha, \\ \gamma', & \beta, & \alpha'. \end{array} \right\} \text{sont en ligne droite,}$$

Ces propriétés des surfaces du second degré ont lieu pour les courbes du même ordre, dans lesquelles on a tracé trois cordes.

Pour s'en convaincre, il suffit de concevoir que la courbe engendre une surface de révolution, en tournant autour d'un de ses axes principaux, et que les trois cordes représentent les projections de trois courbes planes tracées sur la surface, et dont les plans soient perpendiculaires à celui de la figure. Les sommets des six cônes correspondans à ces trois courbes, seront évidemment dans le plan de cette figure, et trois à trois en ligne droite.

Propriété (*) des sections coniques.

Une droite se meut parallèlement a elle-même, en touchant une suite d'ellipses qui ont mêmes foyers ; le lieu des points de contact des ellipses et de la droite mobile, est une hyperbole équilatère, concentrique aux ellipses, et qui passe par les foyers de ces courbes.

(*) Communiquée par M. Frégier, admis à l'Ecole polytechnique, en 1813.

Formule de trigonométrie sphérique ; par M. PARADIS DE MOCRIF, *professeur de l'Ecole impériale de navigation de Bayonne.*

Nommant a, b, c les trois côtés d'un triangle sphérique, A, B, C les angles respectivement opposés à ces côtés, la formule connue :

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C,$$

peut être mise sous la forme suivante :

$$\cos c = \tfrac{1}{2}\cos(a-b) + \tfrac{1}{2}\cos(a+b) + \tfrac{1}{4}\cos(C+(a-b)) + \tfrac{1}{4}\cos(C-(a-b)) - \tfrac{1}{4}\cos(C+(a+b)) - \tfrac{1}{4}\cos(C-(a+b)).$$

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

De la courbe de contact d'un cône ou d'un cylindre, et de la surface hélicoïde des filets de la vis triangulaire ; par M. HACHETTE.

La surface des filets d'une vis triangulaire, est engendrée par une droite, qui a pour directrices, une hélice tracée sur un cylindre droit à base circulaire, et l'axe de ce cylindre ; cet axe qui est aussi l'axe de la vis, est coupé par la droite mobile sous un angle donné, qui est constant pour toutes les positions de cette droite. Nous allons considérer sur cette surface les hélices décrites par les divers points de la droite génératrice, et nous déterminerons sur chacune de ces hélices, le point où la surface hélicoïde est touchée par un plan mené parallèlement à une droite donnée, ou par un point donné hors la surface.

Remarquons 1°. que tous les plans P tangens à la surface, menés par les points d'une même hélice, font avec l'axe de la vis le même angle, puisque chacun d'eux passe par une tangente à l'hélice et par la droite génératrice ; 2°. que la projection orthogonale de l'axe de la vis sur l'un quelconque des plans P tangens à la surface hélicoïde, et la droite génératrice contenue dans ce même plan, comprennent un angle A, qui ne varie pas, quelque soit le plan tangent. Si, par un point quelconque de l'axe, on conçoit une suite

de plans parallèles aux plans menés tangentiellement à la surface par les points d'une même hélice, l'enveloppée de ces plans sera un cône droit, dont on aura facilement la base circulaire sur un plan perpendiculaire à l'axe.

Supposons ce cône droit déterminé ; on mènera un plan tangent à ce cône parallèlement à une droite donnée, ou par un point donné, et on déterminera l'arête de contact. Cette arête sera la projection orthogonale de l'axe de la vis sur un plan parallèle au plan tangent cherché ; donc si, par le sommet du cône droit, on mène dans ce plan parallèle, une droite qui fasse avec l'arête de contact du cône droit, un angle égal à l'angle donné, qu'on a désigné précédemment par la lettre A, cette droite sera la parallèle à la génératrice qui passe par le point de l'hélice, pour lequel le plan tangent à la surface hélicoïde est parallèle à une droite donnée, ou passe par un point donné ; donc la projection de cette parallèle à la génératrice, sur un plan perpendiculaire à l'axe de la vis, coupera le cercle projection de l'hélice, en un point qui déterminera sur cette hélice, les points de contact de la surface hélicoïde, et des plans parallèles à une droite donnée, ou menés par un point donné.

La suite des points déterminés de la même manière appartient à la courbe de contact d'un cône ou d'un cylindre, et de la surface hélicoïde des filets de la vis. Dans le cas où cette surface sera touchée par un cylindre, la projection de la courbe de contact sur le plan perpendiculaire à l'axe de la vis, sera à branches fermées ou à branches infinies, selon que l'angle de l'axe de la vis et de la droite génératrice de la surface hélicoïde, sera plus grand ou plus petit que l'angle formé par l'axe de la vis, et la droite génératrice du cylindre circonscrit à la surface hélicoïde. Lorsque ces deux angles seront égaux, le nombre des branches infinies sera réduit à moitié. Pour voir la raison de cette règle, il faut observer qu'à chaque point de la génératrice de la surface hélicoïde, correspondent une hélice, et une suite de plans tangens à la surface, qui passent par les points de l'hélice, et qui font avec l'axe de la vis le même angle ; pour le point de la génératrice à une distance infinie de l'axe de la vis, et pour tous les points de l'hélice infinie qui passe par ce point, l'angle constant des plans tangens P' menés par les points de l'hélice infinie, avec l'axe de la vis, est égal à l'angle de cet axe et de la génératrice de la surface hélicoïde. La condition pour que l'un des plans tangens P' soit parallèle à une droite donnée D, est la même que celle qui doit être satisfaite, pour qu'un cylindre engendré par une droite parallèle à la droite D, touche la surface hélicoïde suivant une courbe, dont la projection sur un plan perpendiculaire à l'axe de la vis, soit une autre courbe à branches infinies.

Application de cette méthode au dessin de la vis triangulaire.

Nous avons déja résolu cette question (voyez la Correspondance, tome 2, pages 69 et 447) de déterminer sur la surface des filets d'une vis triangulaire, la ligne de séparation d'ombre et de lumière dans l'hypothèse des rayons de lumière parallèles entre eux, mais la méthode précédente est préférable, parce qu'elle donne directement les points de cette ligne sur l'hélice arête des surfaces supérieure et inférieure des filets, sur les hélices intersections de ces surfaces et du cylindre noyau de la vis, et sur des hélices intermédiaires, en tel nombre qu'il est nécessaire pour tracer la courbe avec exactitude.

Cette construction apprend d'ailleurs quelle doit être l'inclinaison du rayon de lumière, pour que la projection de la ligne de séparation d'ombre et de lumière sur un plan perpendiculaire à l'axe de la vis, soit une courbe fermée ou à branches infinies.

Quand à l'ombre portée, par une courbe quelconque, sur la surface hélicoïde des filets, on la construira de la manière la plus simple en coupant d'abord les surfaces supérieure et inférieure des filets par un plan perpendiculaire à l'axe de la vis, et en remarquant que cette courbe est constante de forme. L'ayant tracée, on découpera une cherche, ou un patron suivant cette courbe. On considérera la ligne qui porte ombre sur la surface hélicoïde comme la base d'un cylindre, dont les arêtes sont parallèles au rayon de lumière, et on cherchera l'intersection de ce cylindre et de la surface hélicoïde, en coupant ces deux surfaces par une suite de plans perpendiculaires à l'axe de la vis, et en projettant, par un systême des droites parallèles au rayon de lumière, toutes les sections sur un plan perpendiculaire à l'axe de la vis.

On construira de cette manière tous les points du contour de l'ombre portée sur la surface hélicoïde, au moyen de deux courbes planes, l'une fixe et l'autre mobile, cette dernière courbe étant une section de la surface hélicoïde, qui varie de position, et dont la forme est constante.

De la sphère qui touche quatre sphères données (suite de l'article, page 425-429 du 2e. volume); *par M.* HACHETTE.

Conservant les dénominations précédentes de l'article cité, soient de plus a''', b''', c''' les coordonnées du centre de la quatrième sphère donnée, et r''' son rayon, supposons que la sphère du rayon ρ, dont le centre a pour coordonnées α, β, γ, soit tangente aux quatre sphères données; x, y, z étant les coordonnées du point ou la sphère du rayon ρ touche la première sphère, on a l'équation (6) :

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{r}{r+\rho}; \qquad (6)$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \frac{x(\rho + r)}{r}.$$

Substituant cette valeur dans l'équation (b) (pag. 427, tom. 2) :

$$\rho = \frac{a'r(2x - a') - r(r^2 - r'^2)}{2(r(r-r') - 2a'x)}. \qquad (G)$$

Par l'axe des x qui contient les centres des deux premières sphères données, et par le centre de la quatrième sphère, concevons un plan, et faisons tourner ce plan autour de l'axe des x, jusqu'à ce qu'il soit confondu avec le plan des xy; rapportant les deux premières sphères données, ainsi que la quatrième sphère, à ce nouveau plan, en conservant l'origine des coordonnées et l'axe des x, les coordonnées du centre de la quatrième sphère seront a''', et $\sqrt{b'''^2 + c'''^2}$. Faisant pour abréger $\sqrt{b'''^2 + c'''^2} = B$, et désignant par y' les ordonnées perpendiculaires à l'axe des x, on aura pour l'équation du plan du petit cercle, lieu de tous les points de contact de ces trois sphères, et d'une sphère mobile qui les touche;

$$\left.\begin{array}{l} x\left\{\begin{array}{l} (a'^2 - (r-r')^2(a'''(r-r') - a'(r-r''') \\ - a'(r-r')(a'''^2 + B^2 + r^2 - r'''^2) \\ - a'(r-r''')(r'^2 - r^2 - a^2), \end{array}\right\} \\ \quad + b^2 y'(r-r')(a'^2 - (r-r')^2) \\ \left\{\begin{array}{l} - r(r-r')^2(a'''^2 + B^2 + r^2 - r'''^2) \\ - r(r - r'(r - r''')(a^2 + r^2 - r'^2). \end{array}\right\} \end{array}\right\} \qquad (F')$$

On obtient cette équation en changeant, dans l'équation (F) (pag. 428, tom. II), r'' en r''', et b'' en B.

Faisant successivement dans l'équation (F') $y' = 0$, $x = 0$, on aura les valeurs X et Y de x et de y', qui correspondent à $y' = 0$, et à $x = 0$; la droite, dont l'équation est (F'), coupera l'axe des x et l'axe des y' en deux points, distans des coordonnées de l'origine des quantités X et Y.

Remettant l'axe des y' et la portion Y de cet axe à sa véritable place sur le plan des yz, et élevant une perpendiculaire sur cet axe par l'extrémité de Y, cette perpendiculaire sera sur le plan des yz la trace du plan du petit cercle, lieu des points de contact des trois sphères qui ont pour rayons r, r', r''', et de la sphère mobile qui les touche. Cette trace coupe l'axe des y et l'axe des z en deux points, dont les coordonnées sont $\frac{BY}{b''}$ et $\frac{BY}{c''}$; en sorte que le plan du petit cercle coupe les trois axes des x, des y, z en trois points distans de l'origine des coordonnées des quantités

$$X, \quad \frac{BY}{b''}, \quad \frac{BY}{c''};$$

d'où il suit que l'équation de ce plan est:

$$\frac{x}{X} + \frac{b''y}{BY} + \frac{c''z}{BY} = 1: \qquad (F'')$$

x, y, z étant les coordonnées du point de contact de la première sphère du rayon r, et de la cinquième sphère du rayon ρ, on a pour ce point:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Des équations (G), (F''), et de l'équation (F) (pag. 428, tom. II), linéaires en x, y, z, ρ, on tirera la valeur de ρ de l'équation du second degré ($x^2 + y^2 + z^2 = r^2$). Mettant successivement dans les quatre systêmes d'équations (F), (F'') la différence $r - r'''$ des rayons r, r''', ou leur somme $r + r'''$, on parviendra à huit équations du second degré, d'où l'on tirera les seize valeurs du rayon ρ de la sphère, qui touche les quatre sphères données des rayons r, r', r'', r'''. Quand aux coordonnées α, β, γ, du centre de cette sphère tangente, on tirera leurs valeurs des équations (6):

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma} = \frac{r}{r + \rho}.$$

Note sur une difficulté relative à la rectification des courbes ; par M. Poisson.

Si l'on représente par x et y les coordonnées d'un point quelconque d'une courbe plane, et par s l'arc de la même courbe qui se termine en ce point, on a, comme on sait,

$$ds^2 = dx^2 + dy^2;$$

et le problème de la rectification des courbes, considéré sous le point de vue le plus général, consiste à intégrer cette équation différentielle à trois variables. Elle est de l'espèce de celles qui ne satisfont pas aux conditions d'intégrabilité, c'est-à-dire, que l'on ne peut pas y satifaire par une seule équation en x, y et s, qui laisserait deux de ces variables indépendantes entre elles. Son intégrale générale, telle que M. Monge et M. Lagrange l'ont trouvée, est représentée par le système de trois équations, savoir :

$$x = \varphi'\alpha.\sin\alpha + \varphi''\alpha.\cos\alpha,$$
$$y = \varphi'\alpha.\cos\alpha - \varphi''\alpha.\sin\alpha,$$
$$s = \varphi\alpha + \varphi''\alpha,$$

α étant une nouvelle indéterminée, et $\varphi\alpha$ désignant une fonction arbitraire de cette quantité. On peut vérifier, en effet, que l'équation donnée est satisfaite par ces valeurs de x, y, s; car on en tire

$$dx = +\cos\alpha.(\varphi'\alpha + \varphi'''\alpha)\,d\alpha,$$
$$dy = -\sin\alpha\,(\varphi'\alpha + \varphi'''\alpha)\,d\alpha,$$
$$ds = (\varphi'\alpha + \varphi'''\alpha)\,d\alpha,$$

et par conséquent $ds^2 = dx^2 + dy^2$.

Telle est donc, sous forme finie, la relation qui existe dans toutes les courbes possibles entre l'arc et les coordonnées. Lorsque la fonction $\varphi\alpha$ sera donnée, on aura l'équation de la courbe en éliminant α entre les valeurs de x et de y, et l'on obtiendra l'arc en fonction de l'une des deux coordonnées, en éliminant α entre la valeur de s et celle de cette coordonnée. Mais si, au contraire, l'équation de la courbe est donnée en x et y, on y substituera les valeurs précédentes de ces variables, et il en résultera une équation différentielle du second ordre par rapport à $\varphi\alpha$, qui devra servir à déterminer cette fonction. Or, il se présente ici une difficulté qu'il est bon de remarquer : cette équation différentielle étant du second ordre, la valeur de $\varphi\alpha$, tirée de son intégrale, contiendra

deux constantes arbitraires; il semble donc que la valeur de s, savoir : $s=\phi\alpha+\phi''\alpha$, devra aussi renfermer ces deux constantes, ce qui serait absurde, puisque l'arc indéfini d'une courbe ne comporte, dans son expression, qu'une seule constante arbitraire, dépendante du point fixe d'où il est compté.

Pour éclaircir cette difficulté, désignons par $u=0$ l'équation de la courbe; u étant une fonction donnée de x et y. Si l'on y met pour ces coordonnées leurs valeurs, on ne voit pas d'abord comment l'équation différentielle qui en résultera, pourra s'intégrer en général, et quelle que soit la forme de la fonction u; mais heureusement elle est du genre de celles qui s'intègrent en commençant par les différentier. En effet, d'après les valeurs précédentes de dx et dy, on aura

$$du=\left(\frac{du}{dx}.\cos\alpha-\frac{du}{dy}.\sin\alpha\right)(\varphi'\alpha+\varphi'''\alpha)d\alpha;$$

l'équation $du=0$ se décomposera donc en deux facteurs, savoir :

$$\varphi'\alpha+\varphi'''\alpha=0;\qquad \frac{du}{dx}.\cos\alpha-\frac{du}{dy}.\sin\alpha=0;$$

le premier donne en intégrant

$$\varphi\alpha+\varphi''\alpha=const.;$$

et si l'on élimine $\varphi''\alpha$ entre cette équation et $u=0$, on aura une intégrale première complette de $u=0$. Quant au second facteur de $du=0$, il ne renferme pas $\varphi'''\alpha$, et l'équation qu'on obtient en l'égalant à zéro, est du second ordre comme $u=0$; éliminant donc $\varphi''\alpha$ entre ces deux équations,

$$\frac{du}{dx}.\cos\alpha-\frac{du}{dy}\sin\alpha=0,\qquad u=0,$$

on obtiendra une équation du premier ordre, sans constante arbitraire, qui sera une solution particulière de $u=0$. Or, maintenant on voit que l'intégrale de $u=0$ est étrangère à la question qui nous occupe, puisqu'elle donne une constante pour la quantité $\varphi\alpha+\varphi''\alpha$, qui représente la valeur de l'arc s; c'est donc la solution particulière qui devra servir à déterminer $\varphi\alpha$: on en tirera la valeur de $\varphi'\alpha$, sans constante arbitraire, et en intégrant on aura celle de $\varphi\alpha$, et par suite celle de s avec une seule constante, ainsi que cela doit être.

La même observation s'applique au cas où l'on donne l'arc s en fonction des coordonnées x et y, et où l'on demande l'équation de la courbe. En mettant dans l'équation donnée, à la place

de x, y et s, leurs valeurs, on aura une équation différentielle du second ordre, contenant $\varphi\alpha$, $\varphi'\alpha$, $\varphi''\alpha$: ce sera sa solution particulière, et non pas son intégrale qui devra servir à déterminer $\varphi\alpha$; mais comme cette solution particulière contiendra $\varphi\alpha$ et $\varphi'\alpha$, il faudra l'intégrer pour en déduire la valeur de $\varphi\alpha$, laquelle renfermera ainsi une constante arbitraire. Substituant cette valeur dans celles de x et y, et éliminant ensuite α, on aura en x, y et une seule constante arbitraire, l'équation de la courbe demandée.

On peut remarquer que la difficulté dont nous venons de parler est semblable à celle qui se présente dans la théorie des *développées*, et que M. Lagrange a éclaircie de la même manière. Lorsque l'équation de la développée est donnée, celle de la *développante* ne peut contenir qu'une seule constante arbitraire, dépendante du point où l'on commence le développement; cependant, si l'on met dans l'équation donnée, à la place des deux coordonnées de la développée, leurs valeurs génerales, il en résulte une équation différentielle du second ordre; mais M. Lagrange fait voir que son intégrale complette est l'équation d'un cercle qui a son centre sur la courbe donnée, et que cette équation du second ordre admet toujours une solution particulière du premier ordre, qui est proprement l'équation différentielle première de la développante. (Voyez la Théorie des fonctions, page 208 de la seconde édition.)

Décomposition des fractions rationnelles en d'autres fractions plus simples; par M. De Stainville.

Soit $\dfrac{\psi x}{\varphi x}$ une fraction rationnelle, dont le numérateur soit d'un degré moins élevé que le dénominateur; si on suppose que ce dénominateur soit du degré p, et qu'il contienne le facteur $x-a$ un nombre n de fois, et que, de plus, on substitue $a+y$ au lieu de x, tant au numérateur qu'au dénominateur, elle se changera en une autre dans laquelle le dénominateur ne pourra contenir de puissances de y, inférieures à n, de sorte qu'elle sera égale à

$$\frac{\psi a + y\psi' a + \dfrac{y^2}{2}\psi'' a + \ldots y^{p-1}\dfrac{\psi^{(p-1)}a}{1\ldots p-1}}{y^n\dfrac{\varphi^{(n)}a}{1\ldots n} + \dfrac{y^{n+1}\varphi^{(n+1)}a}{1\ldots n+1} + \ldots y^p\dfrac{\varphi^{(p)}a}{1\ldots p}}.$$

Si on multiplie le numérateur et le dénominateur de cette fraction par z^p, et qu'on fasse ensuite $zy=1$, elle deviendra

$$\frac{z^p\psi a + z^{p-1}\psi' a + z^{p-2}\frac{\psi'' a}{1.2} + \ldots + z\frac{\psi^{(p-1)}a}{1\ldots p-1}}{z^{p-n}\frac{\varphi^{(n)}a}{1\ldots n} + z^{p-n-1}\frac{\varphi^{(n+1)}a}{1\ldots n+1} + \ldots + \frac{\varphi^{(p)}a}{1\ldots p}}.$$

Le numérateur de cette fraction étant d'un degré plus élevé que le dénominateur, on peut effectuer la division et la pousser jusqu'à ce qu'on soit parvenu dans le quotient à un terme qui soit de même degré que la plus faible puissance de z dans le numérateur. Si on le represente par $Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} + \ldots + Pz$, et qu'on désigne le reste par R, on aura une équation qui, étant débarrassée de ses dénominateurs, donnera par la comparaison des termes affectés des mêmes puissances de z, les équations suivantes :

$$\psi a = A\frac{\varphi^{(n)}a}{1\ldots n}; \quad \psi' a = A\frac{\varphi^{(n+1)}a}{1\ldots n+1} + B\frac{\varphi^{(n)}a}{1\ldots n};$$

$$\frac{\psi'' a}{2} = A\frac{\varphi^{(n+2)}a}{1\ldots n+2} + B\frac{\varphi^{(n+1)}a}{1\ldots n+1} + C\frac{\varphi^{(n)}a}{1\ldots n}.$$

De ces équations il sera facile d'en déduire les valeurs de A, B, C, etc. Les valeurs de ces quantités étant ainsi déterminées, si on substitue, tant dans le quotient que dans le reste, $\frac{1}{y}$ au lieu de z, et $x-a$ au lieu de y, on aura

$$\frac{\psi x}{\varphi x} = \frac{A}{(x-a)^n} + \frac{B}{(x-a)^{n-1}} + \frac{C}{(x-a)^{n-2}} + \ldots + \frac{\pi x}{fx};$$

fx étant ce que devient φx, lorsqu'on a supprimé dans ce dénominateur tous les facteurs égaux à $x-a$, et πx étant un polynome de degré inférieur à fx, mais qu'il n'est point nécessaire d'obtenir pour avoir les fractions qui correspondent aux facteurs $x-b$, $x-c$, etc.

Si on suppose que le facteur $x-a$ ne se trouve qu'une seule fois dans φx, il faudra, pour déterminer le numérateur de la fraction qui correspond à ce dénominateur, faire $n=1$ dans la première des équations précédentes, et on trouve

$$A = \frac{\psi a}{\varphi' a},$$

ce qui donne la règle connue, puisque ψa est le résultat de la substitution de a à la place de x dans le numérateur de la fraction proposée, et que $\varphi' a$ est le résultat de la substitution de a à la place de x dans le coefficient différentiel du dénominateur de cette même fraction.

MÉCANIQUE.

Pendule à oscillations coniques ; par M. POUILLET (*), *licencié ès sciences.*

Les équations générales du mouvement d'un point matériel pesant sur une sphère sont :

$$\frac{ydx - xdy}{dt} = c, \qquad (1)$$

$$xdx + ydy + zdz = 0, \qquad (2)$$

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 2gz + c'; \qquad (3)$$

on en déduit

$$dt = \frac{rdz}{\sqrt{(r^2 - z^2)(c' + 2gz) - c^2}}, \quad (4) \qquad d\omega = \frac{cdt}{z^2 - r^2}. \quad (5)$$

(Mécanique de Poisson, liv. II, chap. IV.)

Ces deux dernières équations étant intégrées, donnent z et ω en fonctions du tems ; d'ailleurs

$$y = \sin\omega\sqrt{r^2 - z^2}, \qquad x = \cos\omega\sqrt{r^2 - z^2}.$$

En y mettant pour z et ω, leurs valeurs en t, on aura z, y et x, en t, d'où l'on déduira les équations de la trajectoire ; la position du mobile à chaque instant sur cette courbe, sa vîtesse en un point quelconque, en un mot toutes les circonstances du mouvement.

Appliquons ces formules générales au mouvement du pendule à oscillations coniques.

Supposons qu'un pendule d'une longueur r, ait été écarté de la verticale dans le plan des zx, d'un angle α, et qu'on lui imprime une vîtesse a perpendiculaire à ce plan. Alors au commencement du mouvement, on a

1°. $\frac{dx}{dt} = 0$, $\frac{dy}{dt} = a$, et (1) devient $-ax = c$; d'ailleurs $x = r\sin\alpha$, donc $c = -ar\sin\alpha$;

(*) Article communiqué par M. Poisson.

2°. $z = r\cos\alpha$, $\frac{dz}{dt} = 0$, et (3) devient $a^2 = c' + 2gr\cos\alpha$: donc $c' = a^2 - 2gr\cos\alpha$.

Soit θ l'angle du pendule avec la verticale en une position quelconque, on aura $z = r\cos\theta$. Prenant cette variable θ, au lieu de z, l'équation (4) devient

$$dt = r \cdot \frac{-\sin\theta\, d\theta}{\sqrt{a^2(\sin^2\theta - \sin^2\alpha) - 2gr\sin^2\theta(\cos\alpha - \cos\theta)}}.$$

Posons $\sin^2\theta = \rho$, $\sin^2\alpha = m$, et afin de pouvoir intégrer, supposons que les troisièmes puissances de ρ et de m puissent être négligées, ce qui revient à supposer les angles θ et α assez petits pour qu'on puisse négliger les sixièmes puissances de leur sinus. Alors après les réductions, on a

$$dt = r\frac{-d\rho}{\sqrt{-\rho^2(a^2+gr) + \rho(a^2 + m(a^2+gr)) - a^2 m}};$$

d'où $t = \frac{r}{\sqrt{a^2+gr}} \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arc}\left(\cos = \frac{2\rho - \left(\frac{a^2}{a^2+gr} + m\right)}{m - \frac{a^2}{a^2+gr}}\right)$,

et en posant $k^2 = \frac{a^2}{a^2+gr}$, puis prenant l'arc entier au lieu du demi-arc

$$t = \frac{rk}{a} \cdot \operatorname{arc}\left(\cos = \sqrt{\frac{\sin^2\theta - k^2}{\sin^2\alpha - k^2}}\right).$$

On voit d'après cela que $k < \sin\alpha$ entraine $\sin\theta > k$,
$k = \sin\alpha$ ⸺ $\sin\theta = k$,
$k > \sin\alpha$ ⸺ $\sin\theta < k$.

Discutons successivement ces trois cas.

1°. Quand on a $k < \sin\alpha$ ou $a < \sqrt{gr}\cdot\tang\alpha$, pour $t = 0$, $\theta = \alpha$, si t augmente, $\sqrt{\frac{\sin^2\theta - k^2}{\sin^2\alpha - k^2}}$ diminue; donc $\sin\theta$ diminue jusqu'à $\sin\theta = k = \frac{a}{\sqrt{a^2+gr}}$; alors $t = \frac{kr}{a}\cdot\frac{\pi}{2}$, t continuant d'augmenter, le cosinus reprend des valeurs croissantes,

jusqu'à $\sqrt{\frac{\sin^2\theta - k^2}{\sin^2\alpha - k^2}} = 1$ ou $\theta = \alpha$; alors $t = \frac{kr}{a}.\pi$, t continuant d'augmenter, le cosinus diminue jusqu'à $\sin\theta = k = \frac{a}{\sqrt{a^2+gr}}$; alors $t = \frac{kr}{a}.\frac{3\pi}{2}$, t continuant d'augmenter, le cosinus reprend des valeurs croissantes, jusqu'à $\sqrt{\frac{\sin^2\theta - h^2}{\sin^2\alpha - k^2}} = 1$ ou $\theta = \alpha$; alors $t = \frac{kr}{a}.2\pi$, t augmentant encore, on aura une seconde oscillation tout-à-fait semblable à la première.

2°. Quand on a $k = \sin\alpha$ ou $a = \sqrt{gr}\tang\alpha$, il est nécessaire que $\sin\theta$ soit aussi égal à k; c'est-à-dire, qu'alors le pendule décrit autour de la verticale au cône droit à base circulaire, dont l'angle au centre est double de celui de l'écart.

3°. Quand on a $k > \sin\alpha$ ou $a > \sqrt{gr}.\tang\alpha$, pour $t = 0$, $\theta = \alpha$, si t augmente, $\sqrt{\frac{\sin^2\theta - k^2}{\sin^2\alpha - k^2}}$ diminue; donc $\sin\theta$ augmente, jusqu'à $\sin\theta = k = \frac{a}{\sqrt{a^2+gr}}$, t continuant d'augmenter, le cosinus reprend des valeurs croissantes, jusqu'à...... $\sqrt{\frac{\sin^2\theta - k^2}{\sin^2\alpha - k^2}} = 1$ ou $\theta = \alpha$, t continuant d'augmenter, le cosinus diminue, jusqu'à $\sqrt{\frac{\sin^2\theta - k^2}{\sin^2\alpha - k^2}} = 0$. Par conséquent $\sin\theta$ reprend des valeurs croissantes jusqu'à $\sin\theta = k = \frac{a}{\sqrt{a^2+gr}}$, t continuant d'augmenter, le cosinus augmente jusqu'à..... $\sqrt{\frac{\sin^2\theta - k^2}{\sin^2\alpha - k^2}} = 1$. Par conséquent θ diminue jusqu'à $\theta = \alpha$; c'est-à-dire que si $a > \sqrt{gr}\tang\alpha$, le plus petit écart du pendule est l'écart primitif, et son plus grand écart a pour sinus $\frac{a}{\sqrt{a^2+gr}}$: or, pour trouver l'intégrale, nous avons supposé que les sixièmes puissances de $\sin\alpha$ et $\sin\theta$ soient négligeables; d'où il suit, que pour que la discussion précédente soit juste, il faut non-seulement

que α soit assez petit pour que $\sin^6 \alpha$ puisse être négligé ; mais il faut encore que la force d'impulsion soit telle que la sixième puissance de $\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + gr}}$ puisse être négligée ; quand ces conditions seront remplies, on aura l'angle du pendule avec la verticale à un instant quelconque ; quand elles ne le seront pas, il faudra reprendre les formules rigoureuses, et l'analyse précédente ne sera plus applicable.

Maintenant pour déterminer complettement sa position, cherchons ω en fonction de t par la formule (5) ; elle est intégrable ; soit qu'on cherche d'abord ω en z, soit qu'on cherche directement ω en t : ce moyen est plus court.

En remplaçant c et z par leurs valeurs, l'équation (5) devient

$$d\omega = ar \sin \alpha \cdot \frac{dt}{r^2 - z^2} = ar \sin \alpha \cdot \frac{dt}{r^2 \sin^2 \theta};$$

d'où
$$d\omega = \frac{a \sin \alpha}{r} \cdot \frac{dt}{k^2 + (\sin^2 \alpha - k^2) \cos^2 t \cdot \frac{a}{rk}}$$

$$= \frac{a \sin \alpha}{r^2} \cdot \frac{\left(1 + \operatorname{tang}^2 t \cdot \frac{a}{rk}\right) dt}{k^2 \left(1 + \operatorname{tang}^2 t \cdot \frac{a}{rk}\right) + \sin^2 \alpha - k^2}$$

$$= \frac{a \sin \alpha}{rk^2} \cdot \frac{\frac{rk}{a}\left(1 + \operatorname{tang}^2 t \cdot \frac{a}{rk}\right) dt}{\frac{\sin^2 \alpha}{k^2} + \operatorname{tang}^2 t \cdot \frac{a}{rk}}$$

$$= \frac{a \sin \alpha}{rk^2} \cdot \frac{\left(1 + \operatorname{tang}^2 t \cdot \frac{a}{rk}\right)}{\frac{\sin^2 \alpha}{k^2} + \operatorname{tang}^2 t \cdot \frac{a}{rk}} dt \cdot \frac{a}{rk};$$

mais la différentielle de l'arc $t \cdot \frac{a}{rk}$ est égale à $\dfrac{d \cdot \operatorname{tang} t \cdot \frac{a}{rk}}{1 + \operatorname{tang}^2 t \cdot \frac{a}{rk}}$,

ainsi
$$d\omega = \frac{\sin \alpha}{k} \cdot \frac{d \cdot \operatorname{tang} t \cdot \frac{a}{rk}}{\frac{\sin^2 \alpha}{k^2} + \operatorname{tang}^2 t \cdot \frac{a}{rk}};$$

$$\text{d'où enfin}\quad \omega = \text{arc}\left(\text{tang} = \frac{\text{tang}\, t \cdot \frac{a}{rk}}{\frac{\sin \alpha}{k}}\right),$$

$$\text{où}\quad \text{tang}\, \omega = \frac{k}{\sin \alpha}\, \text{tang}\, t \cdot \frac{a}{rk}.$$

Tirant delà $\sin \omega$ et $\cos \omega$, pour les substituer dans y et x, et y mettant aussi pour z sa valeur en t, on trouve

$$y = rk \sin t \cdot \frac{a}{rk} \quad \text{et} \quad x = r \sin \alpha \cos t \cdot \frac{a}{rk};$$

ensorte qu'on a ces deux formules, et :

$$z = r\sqrt{\cos^2\alpha + (\sin^2\alpha - k^2)\sin^2 t \cdot \frac{a}{rk}},$$

pour déterminer à chaque instant la position du mobile. On en déduit pour les équations de la trajectoire,

$$\left\{\begin{array}{l} r^2 \sin^2\alpha\, y^2 + r^2k^2x^2 = r^4k^2 \sin^2\alpha \\ r^2 \sin^2\alpha\, z^2 + r^2x^2 (k^2 - \sin^2\alpha) = r^4 \sin^2\alpha\, (1 - k^2); \end{array}\right.$$

$$\text{ou}\quad \left\{\begin{array}{l} r^2 \sin^2\alpha\, y^2 + r^2k^2x^2 = r^4k^2 \sin^2\alpha \\ r^2 k^2z^2 - r^2y^2 (\sin^2\alpha - k^2) = r^4k^2 \cos^2\alpha; \end{array}\right.$$

d'où il suit, qu'en général, la projection de la trajectoire sur le plan des xy est une ellipse, et sa projection sur le plan des zx est une ellipse ou une hyperbole, selon que k est $<$ ou $>$ $\sin \alpha$; c'est-à-dire, selon que la vîtesse d'impulsion est $<$ ou $>$ $\sqrt{gr} \cdot \text{tang}\, \alpha$; mais on voit par le second systême, que quand c'est une ellipse sur le plan zx, c'est une hyperbole sur le plan zy, et *vice versâ*. Pour le cas particulier $k = \sin \alpha$, ou $a = \sqrt{gr}\, \text{tang}\, \alpha$, la projection sur le plan xy, devient un cercle de rayon rk, et chacune des autres devient une ligne droite pour laquelle z est constant et $= r \cos \alpha$.

Connaissant ainsi les équations de la trajectoire, il est très-facile de trouver les points qui répondent à une valeur donnée de θ. Leur z se trouvera immédiatement par $z = r \cos \theta$, et les x et les y de ces points sont ceux de la rencontre du cercle $y^2 + x^2 = r^2 \sin^2\theta$ avec l'ellipse $r^2 \sin^2\alpha\, y^2 + r^2k^2x^2 = r^4k^2 \sin^2\alpha$.

On trouve pour la vîtesse du mobile à un instant quelconque,

$$V = \frac{a}{k} \cdot \sqrt{\frac{k^2 \cos^2\alpha + \sin^2 t \cdot \frac{a}{rk}(\sin^2\alpha - k^2)}{\cos^2\alpha + \sin^2 t \cdot \frac{a}{rk}(\sin^2\alpha - k^2)}}.$$

Il est facile de voir qu'elle atteint son *maximum*, quand θ prend la plus petite valeur, c'est-à-dire, quand le mobile est au point le plus bas de sa trajectoire, et qu'elle atteint son *minimum*; quand θ prend sa plus grande valeur, c'est-à-dire, quand le mobile est au point le plus haut de sa trajectoire.

Pour le cas de θ constant, cette vîtesse est constante et égale à la vîtesse d'impulsion a.

En faisant $a = 0$ dans tout ce qui précède, on retrouve le pendule simple à petites oscillations, et toutes les circonstances de son mouvement.

Sur le mouvement de Rotation des corps libres; par M. RODRIGUES, *licencié ès-sciences.*

Je prends dans la mécanique de M. Poisson les six équations du mouvement de rotation des corps libres,

$$\left.\begin{aligned} pdt &= \sin\theta \sin\varphi d\psi - \cos\varphi d\theta, \\ qdt &= \sin\theta \cos\varphi d\psi + \sin\varphi d\theta, \\ rdt &= d\varphi - \cos\theta d\psi. \end{aligned}\right\} \quad (a) \quad \text{(pag. 133, tom. II.)}$$

$$\left.\begin{aligned} Cdr + (B - A)\,pqdt &= 0, \\ Bdq + (A - C)\,prdt &= 0, \\ Adp + (C - B)\,qrdt &= 0, \end{aligned}\right\} \quad (c) \quad \text{(pag. 141, tom. II.)}$$

et je me propose d'intégrer complettement ces six équations différentielles, en conservant aux axes des coordonnées toute leur généralité.

Je parviens, de même que dans l'ouvrage cité, aux équations

$$\left.\begin{aligned} Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 &= h^2, \\ Apa + Bqb + Crc &= l, \\ Apa' + Bqb' + Crc' &= l', \\ Apa'' + Bqb'' + Crc'' &= l'', \end{aligned}\right\} \quad (b) \quad \text{(pag. 143, tom. II.)}$$

ces trois équations carrées et ajoutées donnent

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = K^2,$$

en posant $$K^2 = l^2 + l'^2 + l''^2,$$

au moyen des équations $Ap^2+Bq^2+Cr^2=h^2$, $A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2=K^2$ et des équations (c), on élimine p et q, et l'on a ainsi entre r et le tems t une équation, où les variables se séparent sur-le-champ, et qui donne le tems t en fonction de r au moyen d'une intégration. Ainsi, p, q, r sont déterminés en fonction du tems. Substituant ces valeurs dans les équations (b), on a trois équations entre φ, θ, ψ, et le temps t, mais qui se réduisent à deux à cause que $l^2+l'^2+l''^2=K^2$. Il faut donc encore une intégrale pour compléter la solution de ce problême. Pour la trouver, j'observe que les équations (b) étant multipliées et ajoutées, la première par a, la deuxième par a', la troisième par a'', donnent

$$Ap = al + a'l' + a''l''.$$

On trouve de même
$$Bq = bl + b'l' + b''l'',$$
$$Cr = cl + c'l' + c''l''.$$

Je multiplie la première par p, la seconde par q; je les ajoute ensuite, et je divise par $(al+a'l'+a''l'')^2+(bl+b'l'+b''l'')^2$, qui est égal à $K^2-C^2r^2$; j'obtiens ainsi

$$\frac{dt\,(Ap^2+Bq^2)}{K^2-C^2r^2} = \frac{(al+a'l'+a''l'')\,pdt+(bl+b'l'+b''l'')\,qdt}{(al+a'l'+a''l'')^2+(bl+b'l'+b''l'')^2}:$$

j'ai trouvé que cette formule était intégrable. En effet, mettons à la place de a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', pdt, qdt, leurs valeurs

$$a = \cos\theta\sin\psi\sin\varphi + \cos\psi\cos\varphi, \qquad pdt = \sin\theta\sin\varphi d\psi - \cos\varphi d\theta,$$
$$b = \cos\theta\sin\psi\cos\varphi - \cos\psi\sin\varphi, \qquad qdt = \sin\theta\cos\varphi d\psi + \sin\varphi d\theta,$$
$$c = \sin\theta\sin\psi,$$
$$a' = \cos\theta\cos\psi\sin\varphi - \sin\psi\cos\varphi,$$
$$b' = \cos\theta\cos\psi\cos\varphi + \sin\psi\sin\varphi,$$
$$c' = \sin\theta\cos\psi,$$
$$a'' = -\sin\theta\sin\varphi,$$
$$b'' = -\sin\theta\cos\varphi,$$
$$c'' = \cos\theta,$$

nous trouverons

$$ap+bq = d\psi\,(\sin\theta\cos\theta\sin\psi\sin^2\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\psi + \sin\theta\cos\theta\sin\psi\cos^2\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\psi$$
$$+ d\theta\,(\sin\varphi\cos\varphi\sin\psi\cos\theta - \sin^2\varphi\cos\psi - \cos^2\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\varphi\cos\theta\sin\psi),$$

ou $\quad a\,p + b\,q = \sin\theta\cos\theta\sin\psi\, d\psi - \cos\psi\, d\theta,$

de même $\quad a'p + b'q = \sin\theta\cos\theta\cos\psi\, d\psi + \sin\psi\, d\theta,$

$$a''p + b''q = -\sin^2\theta\, d\psi.$$

Ainsi

$$(al + a'l' + a''l'')\,pdt + (bl + b'l' + b''l'')\,qdt$$
$$= \sin\theta\, d\psi[(l\sin\psi + l'\cos\psi)\cos\theta - l''\sin\theta] - d\theta(l\cos\psi - l'\sin\psi):$$

or, $\quad (al + a'l' + a''l'')^2 + (bl + b'l' + b''l'')^2$
$$= K^2 - (cl + c'l' + c''l'')^2$$
$$= K^2 - [\sin\theta(l\sin\psi + l'\cos\psi) + l''\cos\theta]^2;$$

on a donc

$$\frac{Ap^2 + Bq^2}{K^2 - C^2r^2}\,dt = \frac{\sin\theta\, d\psi\,(\cos\theta\,(l\sin\psi + l'\cos\psi) - l''\sin\theta) - d\theta\,(l\cos\psi - l\sin\psi)}{K^2 - [\sin\theta(l\sin\psi + l\cos\psi) + l'\cos\theta]^2}, \quad (d)$$

puisqu'on connaît p, q, r en fonctions du tems; en substituant leurs valeurs dans le premier membre de cette équation, on aura une formule qu'on intégrera par quadrature. Si donc je parviens à intégrer le deuxième membre en regardant les variables θ, ψ, comme indépendantes, j'aurai la dernière équation nécessaire pour compléter la solution du problême.

J'observe qu'en divisant haut et bas par $\sin^2\theta$ dans la formule (d), et faisant $x = \cot\theta$, l'angle θ disparaît, et la formule devient

$$-\frac{dx.(l\cos\psi - l'\sin\psi) + d\psi\,(x\,(l\sin\psi + l'\cos\psi) - l'')}{K^2(1 + x^2) - (l''x + l\sin\psi + l'\cos\psi)^2}; \quad (d)$$

le dénominateur prend la forme

$$(K^2 - l''^2)x^2 - 2\,xl''(l\sin\psi + l'\cos\psi) + K^2 - (l\sin\psi + l'\cos\psi)^2.$$

Si on le multiplie par $K^2 - l''^2$, et qu'on observe que

$$K^2 - l''^2 = l^2 + l'^2 = (l\sin\psi + l'\cos\psi)^2 + (l\cos\psi - l'\sin\psi)^2,$$

il devient

$$[(K^2 - l''^2)\,x - l''(l\sin\psi + l'\cos\psi)]^2 + K^2(l\cos\psi - l'\sin\psi)^2.$$

Ainsi la formule (d) devient

$$\frac{(K^2 - l''^2)(l\cos\psi - l'\sin\psi)dx - (K^2 - l''^2)d\psi[l''x(l\sin\psi + l'\cos\psi)]}{[(K^2 - l''^2)x - l''(l\sin\psi + l'\cos\psi)]^2 + K^2(l\cos\psi - l'\sin\psi)^2}. \quad (d)$$

Sous cette forme, elle est facilement intégrable par rapport à x, et l'on trouve pour résultat

$$\frac{1}{K}\,\text{arc.tang.}\frac{(K^2 - l''^2)\,x - l''(l\sin\psi + l'\cos\psi)}{K\,(l\cos\psi - l'\sin\psi)}.$$

Assurons-nous par la différentiation par rapport à ψ, que cette formule est aussi l'intégrale en ψ. On trouve en effet

$$+\frac{1}{K}\,\frac{\{K(K^2-l''^2)x - l''(l\sin\psi+l'\cos\psi)(l\sin\psi+l'\cos\psi) - l'K(l\cos\psi-l'\sin\psi)(l\cos\psi-l'\sin\psi)\}\,d\psi}{[(K^2-l''^2)\,x - l''\,(l\sin\psi+l'\cos\psi)\,]^2 + K^2\,(l\cos\psi - l'\sin\psi)^2},$$

expression qui se réduit à

$$-\frac{(K^2 - l''^2)\,d\psi\,(l'' - x\,(l\sin\psi + l'\cos\psi)\,d\psi}{[(K^2 - l''^2)\,x - l''\,(l\sin\psi + l'\cos\psi)]^2 + K^2\,(l\cos\psi - l'\sin\psi)^2},$$

qui est la partie relative à ψ dans la formule (d).

Remettant pour x sa valeur, l'équation que nous cherchons, et qui est la sixième intégrale des équations du mouvement de rotation, est

$$\int\frac{(Ap^2+Bq^2)Kdt}{K^2 - C^2r^2} = const. + \text{arc.tang.}\frac{(K^2 - l''^2)\cot\theta - l''(l\sin\psi + l'\cos\psi)}{K\,(l\cos\psi - l'\sin\psi)}.$$

Pour construire cette expression trigonométrique, je vais introduire les angles que la droite perpendiculaire au plan invariable fait avec les axes des coordonnées. Soient α, β, γ ces angles, on aura (*voyez* la mécanique de M. Poisson)

$$l = -K\cos\alpha, \quad l' = -K\cos\beta, \quad l'' = -K\cos\gamma.$$

Appelons ω l'angle formé par cette droite avec l'axe du corps, nous aurons

$$\cos\omega = -\frac{(cl + c'l' + c''l'')}{K};$$

or,

$$\sin\psi = \frac{c}{\sin\theta}, \qquad \cos\psi = \frac{c'}{\sin\theta};$$

on a donc par ces substitutions

$$\frac{(K^2-l''^2)\cot\theta - l''(l\sin\psi+l'\cos\psi)}{K(l\cos\psi - l'\sin\psi)} = \frac{\sin^2\gamma\cos\theta - \cos\gamma\,(c\cos\alpha + c'\cos\beta)}{c\cos\beta - c'\cos\alpha} = \frac{\cos\theta - \cos\gamma\cos\omega}{c\cos\ - c'\cos\alpha}. \quad (A)$$

Mais $\quad (c\cos\beta - c'\cos\alpha)^2 = \sin^2\gamma\sin^2\theta - (c\cos\alpha + c'\cos\beta)^2$;
d'ailleurs $(c\cos\alpha + c'\cos\beta)^2 = (\cos\omega - \cos\gamma\cos\theta)^2$.

On a donc (A) cette nouvelle expression, au lieu de la précédente (A)

$$\frac{\cos\theta - \cos\gamma\cos\omega}{\sqrt{\sin^2\gamma\sin^2\theta - (\cos\omega - \cos\gamma\cos\theta)^2}}; \qquad (A)$$

donc le sinus de l'arc, dont (A) est la tangente, est égal à

$$\frac{\cos\theta-\cos\gamma\cos\omega}{\sqrt{(\cos\theta-\cos\gamma\cos\omega)^2+(\cos\omega-\cos\gamma\cos\theta)^2+\sin^2\gamma\sin^2\theta}}=\frac{\cos\theta-\cos\gamma\cos\omega}{\sin\gamma\sin\omega}.$$

Or, si nous observons que θ est l'angle formé par l'axe du corps et l'axe fixe, γ celui formé par l'axe fixe et l'axe du plan principal, ω l'angle de l'axe du corps et de ce dernier axe, nous voyons par la trigonométrie sphérique que $\frac{\cos\theta - \cos\gamma\cos\omega}{\sin\gamma\sin\omega}$ est le cosinus de l'angle formé par le plan, qui passe par l'axe du plan principal et par l'axe fixe, avec le plan passant par la première de ces deux droites et par l'axe du corps; lequel angle est le même que celui que la trace du plan des xy, pris dans les corps sur le plan principal, fait avec l'intersection de ce plan avec le plan fixe des xy. Nommant le complément cet angle ψ', on a

$$\psi' - const. = \int\frac{Kdt\,(Ap^2+Bq^2)}{K^2-c^2r^2},$$

et à cause de la constante arbitraire, l'angle ψ' peut être compté dans le plan principal à partir d'une droite quelconque qui sera l'axe des x dans ce plan; mais de manière que cet angle augmentant, l'angle qui sera formé avec l'axe des y, augmente aussi. La correspondance à établir entre ce résultat final et celui qu'on obtient en suivant la marche de l'ouvrage cité, est trop simple pour que nous nous y arrêtions.

De l'angle de contingence d'une courbe à double courbure.

(Question proposée à la thèse de licence, soutenue par M. Rodrigues, le 29 novembre 1813.)

Cet angle est formé, comme on sait, par deux tangentes consécutives à la courbe. Soient a, b, c les cosinus des angles que forme avec les axes la première de ces tangentes; $a+da$, $b+db$, $c+dc$ seront ceux des angles que forme la tangente consécutive. Et si l'on appelle ε l'angle de contingence, on aura

$$\cos\varepsilon = a(a+da)+b(b+db)+c(c+dc);$$

mais à cause que les coordonnées sont rectangles, on a:

$$a^2+b^2+c^2=1,$$

$$(a+da)^2+(b+db)^2+(c+dc)^2=1,$$

où

$$-2(ada+bdb+cdc)=da^2+db^2+dc^2;$$

de l'expression de cos ι, je tire

$$\sin^2\iota = -2(ada+bdb+cdc-(ada+bdb+cdc)^2 = da^2+db^2+c^2,$$

en négligeant les infinimens petits du quatrième ordre. Mais

$$a=\frac{dx}{ds},\qquad b=\frac{dy}{ds},\qquad c=\frac{dz}{ds};$$

donc $$\sin^2\iota=\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2,$$

ou prenant l'arc à la place du sinus

$$\iota=\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2};$$

on tire delà le rayon de courbure

$$r=\frac{ds}{\iota}=\frac{ds}{\sqrt{\left(d.\frac{dx}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dy}{ds}\right)^2+\left(d.\frac{dz}{ds}\right)^2}}.$$

Sur la résistance qu'éprouve un point matériel assujéti à se mouvoir sur une courbe donnée; par M. Rodrigues.

Appelons N cette résistance qui est dirigée normalement à la courbe donnée. Soient $\iota\,\iota'\iota''$ les angles que sa direction fait avec les axes des coordonnées. Cette résistance est, comme on sait, égale et directement opposée à la pression que le point exerce sur la courbe dans son mouvement. Les équations de ce mouvement sont

$$\left.\begin{aligned}\frac{d^2x}{dt^2}-X&=N\cos\iota\\ \frac{d^2y}{dt^2}-Y&=N\cos\iota'\\ \frac{d^2z}{dt^2}-Z&=N\cos\iota''.\end{aligned}\right\}$$ (Mécanique de M. Poisson, pag. 371, tom. I.)

Je me propose ici de démontrer d'une manière purement analytique, que cette force N est égale et directement opposée à la résultante de deux forces normales à la courbe, l'une provenant des forces imprimées au mobile, et qui serait, dans l'état d'équi-

libre, la pression que supporterait la courbe, l'autre due à la vitesse du mobile égale au carré de cette vitesse divisé par le rayon de courbure, et dirigée suivant ce rayon du dedans au dehors, tendant en effet à éloigner le mobile du centre de la courbure; et qu'on nomme pour cela force centrifuge.

Mais il est nécessaire de rappeler ici l'expression analytique des cosinus des angles que la direction de ce rayon fait avec les axes des coordonnées. Appelons δ, δ', δ'' ces angles; α et γ les coordonnées du centre du cercle osculateur; r le rayon de ce cercle, on aura évidemment

$$\cos\delta = \frac{x-\alpha}{r}, \qquad \cos\delta' = \frac{y-\beta}{r}, \qquad \cos\delta'' = \frac{z-\gamma}{r},$$

et ces cosinus ainsi pris, appartiennent nécessairement au prolongement du rayon à partir de la courbe, et en dehors de sa concavité.

Maintenant on trouve par la théorie des osculations, qu'en posant l'élément ds de la courbe constant,

$$x-\alpha = -\frac{d^2x.ds^2}{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}, \qquad y-\beta = -\frac{d^2y.ds^2}{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2},$$

$$z-\gamma = -\frac{d^2z.ds^2}{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2}, \qquad r^2 = -\frac{ds^4}{d^2x^2+d^2y^2+d^2z^2};$$

on aura donc

$$\cos\delta = -r\frac{d^2x}{ds^2}, \qquad \cos\delta' = -r\frac{d^2y}{ds^2}, \qquad \cos\delta'' = -r\frac{d^2z}{ds^2},$$

ou en rétablissant l'indépendance des différentielles

$$\cos\delta = -r\frac{d.\frac{dx}{ds}}{ds}, \quad \cos\delta' = -r\frac{d.\frac{dy}{ds}}{ds}, \quad \cos\delta'' = -r\frac{d.\frac{dz}{ds}}{ds}.$$

Revenons maintenant aux équations du mouvement. On peut leur donner la forme

$$\frac{dsd^2x-dxd^2s}{dsdt^2}-\left(X-\frac{dx}{ds}\,\frac{d^2s}{dt^2}\right)=N\cos\epsilon,$$

$$\frac{dsd^2y-dyd^2s}{dsdt^2}-\left(Y-\frac{dy}{ds}\,\frac{d^2s}{dt^2}\right)=N'\cos\epsilon',$$

$$\frac{dsd^2z-dzd^2s}{dsdt^2}-\left(Z-\frac{dz}{as}\,\frac{d^2s}{dt^2}\right)=N''\cos\epsilon''.$$

Mais $dsd^2x - dxd^2s = ds^2d.\frac{dx}{ds}$, $dsd^2y - dyd^2s = ds^2d.\frac{dy}{ds}$,

$dsd^2z - dzd^2s = ds^2d.\frac{dz}{ds}$;

d'ailleurs $\frac{ds^2}{dt^2} = v^2$, et par les valeurs précédentes de $\cos \delta$, $\cos \delta'$, $\cos \delta''$, on a

$$d\frac{dx}{ds} = -\frac{ds}{r}\cos\delta,\quad d\frac{dy}{ds} = -\frac{ds}{r}\cos\delta',\quad d\frac{dz}{ds} = -\frac{ds}{r}\cos\delta''.$$

Ces équations prenent donc la forme

$$-\frac{v^2}{r}\cos\delta - \left(X - \frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\right) = N\cos\varepsilon,$$

$$-\frac{v^2}{r}\cos\delta' - \left(Y - \frac{dy}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\right) = N\cos\varepsilon',$$

$$-\frac{v^2}{r}\cos\delta'' - \left(Z - \frac{dz}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}\right) = N\cos\varepsilon''.$$

Mais j'observe que $X - \frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$, $Y - \frac{dy}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$, $Z - \frac{dz}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$, sont les composantes des forces normales imprimées au mobile : en effet, pour avoir ces composantes, il faut des composantes totales X, Y, Z, retrancher les composantes de la force tangentielle $\frac{d^2s}{dt^2}$, savoir : $\frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$, $\frac{dy}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$ $\frac{dz}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$. On voit donc par là que les composantes $N\cos\varepsilon$, $N\cos\varepsilon'$, $N\cos\varepsilon''$, de la résistance N sont égales et de signe contraire aux sommes des composantes $\frac{v^2}{r}\cos\delta$, $X - \frac{dx}{ds}\frac{d^2s}{dt^2}$, etc. ; d'où il est clair que cette résistance est égale et directement opposée à la résultante de deux forces normales à la courbe, l'une provenant des forces imprimées au mobile, et l'autre due à la vitesse du mobile, laquelle se mesure par le carré de cette vitesse divisé par le rayon de la courbure, et est dirigée suivant ce rayon du dedans de la courbe au dehors, de manière à éloigner le mobile du centre de courbure.

ASTRONOMIE.

Recherche des variations qu'éprouvent les ascensions droites et les déclinaisons des Etoiles, en vertu d'un petit déplacement de l'équateur et de la ligne des équinoxes; par M. Puissant (*).

Pour démontrer les formules de nutation données par Lambert, M. Cagnoli a recours aux analogies différentielles de la trigonométrie sphérique. D'autres géomètres, et notamment MM. Biot et Delambre, sont parvenus à ces formules par des considérations purement élémentaires; mais, en ne renonçant pas à l'usage du calcul différentiel, on peut les obtenir *à priori*, et très-simplement, par la méthode suivante.

Equations fondamentales.

Désignons par E le lieu d'une étoile, par P le pôle de l'équateur céleste, par P' celui de l'écliptique; et soient A l'ascension droite moyenne de l'étoile, D sa déclinaison moyenne supposée boréale, L sa longitude supposée moindre que 90°, λ sa latitude boréale. Enfin, appelons ω l'obliquité de l'écliptique.

Cela posé, dans le triangle sphérique EPP', on aura évidemment

$$PP' = \omega, \qquad PE = 90° - D, \qquad P'E = 90° - \lambda,$$
$$\text{angle } P' = 90 - L, \qquad \text{angle } P'PE = 90 + A,$$

et ce même triangle offrira les relations

$$(1) \qquad \sin D = \sin \omega \cos \lambda \sin L + \cos \omega \sin \lambda,$$

$$(2) \qquad \tang A = -\frac{\tang \lambda \sin \omega - \cos \omega \sin L}{\cos L},$$

$$(3) \qquad \cos A \cos D = \cos \lambda \cos L,$$

$$(4) \qquad \sin \lambda = \cos \omega \sin D - \sin \omega \cos D \sin A.$$

Solution.

La variation d'obliquité due à un mouvement de rotation de l'équateur autour de la ligne des équinoxes, n'a point d'influence

(*) Voyez, pour l'intelligence de cet article, le *Traité d'astronomie physique*, par M. Biot, tom. II, pag. 111 et suivantes.

sur les latitudes ni sur les longitudes des astres, mais elle affecte leurs ascensions droites et leurs déclinaisons. Quant au déplacement des points équinoxiaux, il produit nécessairement un changement, tant dans ces dernières coordonnées que dans les longitudes. Les effets réunis de ces deux causes étant supposés très-petits, il en résulte qu'en différentiant les équations (1) et (3), et faisant varier à-la-fois A, D, ω et L, on parviendra, après quelques transformations faciles, aux formules dont il s'agit. En effet, on trouve par la première équation,

$$dD = d\omega \left(\frac{\cos\omega \cos\lambda \sin L - \sin\omega \sin\lambda}{\cos D} \right) + dL . \frac{\sin\omega \cos\lambda \cos L}{\cos D};$$

et comme l'équation (2) peut s'écrire ainsi :

$$\cos L \frac{\sin A}{\cos A} \cos\lambda = \cos\omega \sin L \cos\lambda - \sin\omega \sin\lambda,$$

il en résulte que l'équation différentielle précédente, en ayant d'ailleurs égard à la relation (3), se réduit à celle-ci :

$$(5) \qquad dD = d\omega \sin A + dL \sin\omega \cos A,$$

Telle est la variation en déclinaison cherchée.

L'équation (3) étant différentiée, on en tire

$$dA = -\frac{dD \cos A \sin D}{\sin A \cos D} + \frac{dL \cos\lambda \sin L}{\sin A \cos D};$$

mais les équations (1) et (4) donnent

$$\cos\lambda \sin L = \frac{\sin D - \cos\omega \sin\lambda}{\sin\omega} = \sin\omega \sin D + \cos\omega \sin A \cos D.$$

Substituant cette valeur dans l'équation précédente, ainsi que celle de dD, on obtient, réductions faites,

$$(6) \quad dA = -d\omega \cos A \tang D + dL (\cos\omega + \sin\omega \sin A \tang D).$$

Les formules (5) et (6) seront celles de *nutation lunaire* en déclinaison et en ascension droite, si on met pour $d\omega$ et dL leurs valeurs relatives à ce phénomène. Or, l'observation et la théorie de l'attraction universelle ont fait connaître que la variation d'obliquité et celle de la longitude sont dépendantes de la longitude moyenne du nœud ascendant N de la lune, et que l'on a

$$d\omega = 9'',6 \cos N, \qquad dL = -\frac{9'',6 \cos 2\omega}{\cos\omega} . \frac{\sin N}{\sin\omega},$$

$9'',6$ étant le demi-grand axe de l'ellipse de nutation, et $\frac{9'',6 \cos 2\omega}{\cos \omega}$ son demi petit axe. (*Mécanique céleste*, tom. II, pag. 351 ; et *Abrégé d'astronomie* de Delambre, pag. 514.)

Cela posé, soit, pour abréger,

$$d\omega = m \cos N, \qquad dL = -n \sin N,$$

les formules (5) et (6) se changeront en celles-ci

nut. en décli. $= m \sin A \cos N - n \sin \omega \cos A \sin N,$

nut. en asc. dr. $\begin{cases} = - m \operatorname{tang} D \cos A \cos N \\ \quad + n \sin \omega \operatorname{tang} D \sin A \sin N - n \cos \omega \sin N; \end{cases}$

mais en général

$$\sin x \cos y = \tfrac{1}{2} \sin(x+y) + \tfrac{1}{2} \sin(x-y),$$
$$\cos x \cos y = \tfrac{1}{2} \cos(x+y) + \tfrac{1}{2} \cos(x-y),$$
$$\sin x \sin y = \tfrac{1}{2} \cos(x-y) - \tfrac{1}{2} \cos(x+y).$$

Ainsi

dD ou

nut. en décli. $= \tfrac{1}{2}(m - n \sin \omega) \sin(A+N) + \tfrac{1}{2}(m + n \sin \omega) \sin(A-N)$

dA ou

nut. en asc. dr. $\begin{cases} = - n \cos \omega \sin N \\ \quad - \operatorname{tang} D [\tfrac{1}{2}(m - n \sin \omega) \cos(A+N) + \tfrac{1}{2}(m + n \sin \omega) \cos(A-N)] \end{cases}$

Si donc D' et A' sont respectivement la déclinaison et l'ascension droite apparentes on aura

$$D' = D + dD, \qquad A' = A + dA.$$

Ces deux formules de nutation sont calculées dans la supposition que la déclinaison D est boréale; mais il est facile de voir que si cette déclinaison était australe, il faudrait seulement prendre la valeur de dD avec un signe contraire.

En faisant $d\omega = 0$ dans les formules (5) et (6), on obtient sur-le-champ celles de précession en ascension droite et en déclinaison; mais on a $dL = 50'',1$. On voit par-là combien la méthode précédente est générale et simple.

De la vis d'Archimède ; par M. Hachette.

On suppose la vis réduite à un tube héliçoïde (pl. 3) *Ocek* (fig. 1, *a*), *O'c'e'k'* (fig. 1, *b*), dont l'axe est *E* (fig. 1, *a*), *E'K'* (fig. 1, *b*). Cet axe fait, avec la tangente à l'hélice au point (*C*, *C'*), et avec le plan horisontal du niveau des eaux, les angles *E'C'M'*, *E'C'T'*.

I.

Le point *O*, *O'* étant l'origine du tube héliçoïde, et en même tems l'orifice par lequel l'eau s'introduit dans le tube, l'élément de l'hélice en ce point doit, en tournant autour de l'axe *E*, (*E' E'*), prendre des positions telles que l'eau puisse s'écouler sur cet élément comme sur un plan incliné ; ce qui ne peut avoir lieu que lorsque *le tube héliçoïde tourne dans un sens contraire à celui du point générateur de l'hélice.*

II.

Si on suppose que le tube, après avoir fait plusieurs révolutions autour de son axe, passe de l'état de mouvement à celui du repos, il sera divisé en plusieurs portions contenant alternativement ou de l'eau ou de l'air. Soient (*c*, *c'*), (*e*, *e'*) les points pour lesquels les tangentes à l'hélice sont parallèles au plan horisontal, la portion du tube contenant l'eau sera la plus grande possible, lorsqu'elle sera égale à la portion d'hélice *cek*, *c'e'k'*, comprise entre les points (*c*, *c'*), (*e*, *e'*) ; l'eau n'obéissant qu'à la loi de la pesanteur, remplira cet espace, et l'air compris entre deux portions consécutives d'eau, sera de même densité que l'air atmosphérique.

III.

Pour que l'air atmosphérique remplisse les intervalles qui séparent les arcs d'hélice remplis d'eau, il faut, à chaque révolution du tube, introduire un volume d'air atmosphérique égal au volume d'eau qui s'échappe par l'orifice supérieur du tube.

Le tube héliçoïde et son inclinaison par rapport au plan du niveau des eaux, étant donnés, la position de ce plan par rapport au cercle décrit par l'orifice inférieur du tube, est déterminée ; lorsque l'arc d'hélice, correspondant à l'arc de cercle que cet orifice décrit au-dessus du niveau des eaux, n'est pas égal en développement, à l'arc d'hélice qui doit contenir le *maximum* d'eau, l'air compris entre deux portions consécutives d'eau n'est pas de même densité que l'air atmosphérique, et une partie de la force qui fait

tourner ce tube, est employée à produire des mouvemens d'air qui sont perdus pour l'effet utile de la vis.

IV.

Si le cercle décrit par l'orifice inférieur du tube, plonge entièrement dans un réservoir, l'eau élevée dans le tube tend à descendre avec une vîtesse qui croît en même tems que la hauteur du niveau de l'eau dans l'intérieur de ce tube; et lorsque cette vîtesse est égale à celle que l'eau acquiert par la rotation de la vis, l'eau cesse de s'élever.

V.

En augmentant continuellement la vîtesse de rotation de la vis, la force centrifuge devient plus grande que la gravité, et l'eau, au lieu de monter, s'échappe par l'orifice inférieur du tube.

VI.

Détermination des points (c, c'), (e, e') de l'hélice, pour lesquels la tangente à cette courbe est parallèle au plan du niveau des eaux.

(Voyez la construction de cette tangente, supplément de la *Géométrie descriptive*, pag. 86, art. 96.)

$$\text{angle } TC'E' = \alpha, \quad \text{angle } M'C'E' = \beta, \quad C'E' = h,$$

$$E'M' = EM = EV' = \frac{h \sin \beta}{\cos \beta}, \quad E'T = Et = \frac{h \sin \alpha}{\cos \alpha}.$$

$$V'E : 1 :: Et : \sin \text{arc } Oc = \frac{Et}{V'E} = \frac{\text{tang}\,\alpha}{\text{tang}\,\beta} = \sin \text{arc } (\alpha e).$$

Un sinus est toujours plus petit que l'unité; donc on doit avoir $\beta > \alpha$. Cette condition étant satisfaite, ainsi que celle de l'art. I, l'eau pourra s'élever dans le tube heliçoïde.

VII.

Tous les points tels que (c, c') ou (e, e'), pour lesquels la tangente à l'hélice est parallèle au plan du niveau des eaux, sont situés sur une arête du cylindre droit qui a pour base le cercle décrit par l'orifice inférieur du tube. Lorsque cet orifice sera en (c, c''), le point du tube pour lequel la tangente sera horisontale, occupera la position (e, e''), telle que l'arc d'hélice ce, $c''e''$ sera de même longueur que l'arc $(ce, c'e')$, et tandis que l'orifice inférieur du tube décrira l'arc de cercle ce, fig. 1 *a*, $c''\iota$, fig. 1 *b*, l'élément du tube près cet orifice, aura (I) l'inclinaison convenable, pour recevoir l'eau du réservoir; car si l'on suppose l'orifice inférieur en un point (m, m') de l'arc de cercle $(ce, c''\iota)$, l'élément du

tube en ce point sera parallèle à l'élément de l'hélice (ce, $c'e'$) au point (m, n); donc, si le niveau des eaux passe par le point (c, c''), ou au-dessus de ce point, cet arc d'hélice ce, $c''e''$, contenant l'eau, sera le plus grand possible; mais il peut arriver que l'arc d'hélice correspondant à l'arc de cercle que l'orifice inférieur du tube décrit au-dessus du niveau des eaux, et qui se remplit d'air, ne soit pas égal en développement à la portion d'hélice (ce, $c''e''$): dans ce cas (III), on n'élevera pas à chaque révolution de la vis, une portion d'eau égale à celle dont cet arc est capable. Le *maximum* d'effet de la vis dépend donc du rapport entre une portion d'hélice, dont la limite est déterminée par l'inclinaison du tube héliçoïde, et la portion d'arc de cercle décrit par l'orifice inférieur du tube au-dessus du niveau des eaux.

Note sur la vis d'Archimède; par M. NAVIER, *ingénieur des ponts et chaussées.*

La vis d'Archimède est une des machines les plus propres à piquer la curiosité, et sur la nature de laquelle il est le plus difficile de se former des notions exactes. Sa théorie a été traitée par plusieurs savans. Pitot a donné des recherches sur ce sujet dans les Mémoires de l'académie pour 1736. Soit MN, $M'N'$ (fig. 2, pl. 3) un tube roulé en hélice sur un cylindre; et soit mené des plans horisontaux pq, $p'q'$, etc., tangens aux révolutions de l'hélice; ces plans intercepteront sous eux des arcs pNq, $p'N'q'$, etc., dans lesquels il se tiendrait de l'eau, si l'on suppose qu'une vis étant en repos, on en verse par son extrémité supérieure. C'est ce que Pitot nomme *arc hydrophore*. Il suppose que quand une vis est en mouvement, les arcs hydrophores montent remplis d'eau, et calcule en conséquence la quantité qu'elle peut fournir, et l'effort qu'il faut employer pour la faire mouvoir.

Daniel Bernoully a traité dans son *Hydrodynamique*, qui a paru en 1738, la théorie de la vis d'Archimède, à-peu-près de la même manière que Pitot, quoiqu'il y ait toute apparence qu'il n'avait pas connaissance de son travail.

Euler a repris la théorie de la vis d'Archimède dans un Mémoire imprimé dans le tome 5 des Mémoires de Pétersbourg.

Je ne connais point sur ce sujet de recherches analytiques postérieures à celles d'Euler qui méritent quelque attention.

Tous les ingénieurs connaissent un tableau d'expériences faites sur la vis d'Archimède, sous la direction de M. Garipuy, directeur du canal du Languedoc. On se servait de vis dont l'angle d'in-

clinaison de l'hélice sur l'axe était de 60° anciens. On a varié les hauteurs, les diamètres et les inclinaisons. Il est résulté que la vis ne montait point d'eau quand son axe faisait avec l'horison un angle d'environ 60°, et qu'elle donnait le plus grand produit quand cet angle était de 30°; en sorte qu'il paraît que l'angle d'inclinaison qui comporte à vîtesses égales le *maximum* d'eau élevée, est la moitié de l'angle que l'hélice fait avec son axe, et est indépendant de la vîtesse de rotation. Il est très-remarquable que ce résultat, si simple et si utile, n'ait été trouvé par aucun des savans qui se sont occupés de cette machine.

Le rapprochement des expériences faites dans les épuisemens par la vis d'Archimède, a appris que moyennement un homme pouvait, en vingt-quatre heures, monter 90 mètres cubes d'eau à un mètre de hauteur, par le moyen de cette machine. (Voyez le Traité de la construction des ponts, par M. Gauthey, tom. II.)

Ces deux résultats suffisent sans doute à tous les besoins de la pratique, et on n'a ici pour objet que de faire quelques observations sur la nature du mouvement de la vis.

Il y a dans toute machine deux élémens qui constituent son produit; l'un est la quantité d'eau qu'elle monte, et l'autre la vîtesse d'ascension. Quelquefois ces deux élémens sont très-distincts, comme dans une pompe où on considère facilement à part le volume d'eau monté à chaque levée du piston, et le nombre de levées que le piston fait dans un tems donné. Dans la vis d'Archimède, ces deux élémens sont confondus, et il paraît que c'est à cela que tient principalement l'espèce d'obscurité qu'offre le jeu de cette machine.

Du volume d'eau monté par une vis.

Soit faite la projection de la vis sur un plan vertical passant par son axe, et supposons que le point M (fig. 3. pl. 3) projetté sur l'axe soit l'orifice d'entrée du tube; soit MT la tangente à l'hélice au point M; soit menée l'horisontale MN, et nommons α l'angle nMN que fait l'axe de la vis avec l'horison, et θ l'angle constant nMT que cet axe fait avec l'hélice.

L'angle que fait la tangente MT avec l'horison est $\theta - \alpha$. On voit d'abord que l'eau n'entrera point dans le tube si $\theta = \alpha$. Si θ est $> \alpha$, l'eau tendra à y entrer avec la force accélératrice $g \sin(\theta - \alpha)$, g étant la gravité. Or, pour suivre la comparaison de la vis avec une pompe, le volume d'eau monté à chaque levée du piston, est proportionnel à la force accélératrice à laquelle l'eau cède en franchissant la soupape. De même, dans la vis, le volume d'eau monté sera proportionnel à la quantité $g \sin(\theta - \alpha)$.

De la vîtesse avec laquelle l'eau monte dans la vis.

Soit v la vîtesse angulaire imprimée à la vis, et r le rayon du cylindre. La vîtesse de rotation vr se communiquera à l'eau qui y sera contenue : il en résultera que cette eau prendra, dans le sens des hélices, la vîtesse $vr \sin \theta$, laquelle équivaut, dans le sens de l'axe de la vis, à la vitesse $vr \sin \theta \cos \theta$, et dans le sens vertical, à la vîtesse $vr \sin \theta \cos \theta \sin \alpha$. Cette dernière quantité exprimera donc la hauteur verticale dont l'eau contenue dans la vis montera dans une seconde.

De l'inclinaison sous laquelle la vis donne le plus grand produit.

Le produit d'une machine est proportionnel au volume d'eau élevée multiplié par sa vîtesse verticale. Donc le produit de la vis est proportionnel à la quantité

$$g \sin (\theta - \alpha)\, vr \sin \theta \cos \theta \sin \alpha,$$

ou, en supprimant les facteurs constans, à la quantité

$$\sin (\theta - \alpha) \sin \alpha,$$

En déterminant α de manière que cette quantité soit un *maximum*, on trouve $\alpha = \frac{1}{2} \theta$, conformément à l'expérience.

De la force nécessaire pour monter par une vis une quantité d'eau donnée à une hauteur donnée.

Il ne paraît point facile de déterminer par le calcul le volume d'eau qu'une vis monte dans une seconde, ou du moins on arriverait pour cela à des formules très-compliquées, et on ne pourrait guère tenir exactement compte de circonstances importantes, telles que la contraction à l'entrée de l'eau dans la vis, et le frottement de l'eau dans les tubes. Mais comme on vient de trouver une quantité à laquelle ce volume est proportionnel, il suffit de faire usage des expériences connues sur les vis de divers diamètres pour le calculer dans tous les cas par une simple proportion. La quantité d'eau qu'une vis de position et de construction données montera par seconde étant fixée, il s'agit de savoir quelle force il faudra appliquer à la manivelle.

On remarquera à ce sujet que, si on fait abstraction des frottemens et contractions, il ne peut y avoir dans la vis aucune perte de force vive. Donc la force vive imprimée à la manivelle doit

être égale à la force vive représentée par l'ascension de l'eau, plus celle que l'eau peut conserver à l'instant où elle quitte la vis. Or, il est aisé de voir que cette dernière force vive est nulle; car le mouvement giratoire de la vis ne peut imprimer à l'eau, dans le sens des hélices, la vîtesse $vr \sin \theta$, que parce que les hélices se meuvent en sens contraire avec cette même vîtesse : en sorte que l'eau se trouve emportée par la machine, en sens contraire de son mouvement, avec une vîtesse égale à la vitesse relative avec laquelle elle se meut dans la machine. Donc elle n'a aucune vîtesse à l'instant où elle la quitte, du moins si l'on néglige la vîtesse provenant de la force centrifuge, comme cela est d'usage dans des cas semblables.

Il suit delà qu'abstraction faite des frottemens, la force vive dépensée à la manivelle doit être entièrement utilisée pour l'élévation de l'eau. Ces frottemens sont d'ailleurs très-peu considérables; en sorte que l'effet utile doit différer peu de la force vive dépensée.

Les causes de déchet dans la pratique, sont les pertes d'eau qui ont assez souvent lieu par les jointures de l'enveloppe extérieure, et sur-tout la nécessité où l'on est d'élever l'eau un peu plus haut que la buse de décharge, parce qu'elle doit retomber de la vis dans cette buse. On peut avancer que moyennement l'eau est élevée à 0m.50 au moins plus haut qu'il ne serait nécessaire; en sorte que les vis ne montant guère l'eau dans les épuisemens à plus de 2 à 3 mètres, cette circonstance fait perdre une partie très-sensible de la force dépensée.

On peut admettre qu'un homme employé à faire mouvoir une manivelle, y dépense dans sa journée une force vive équivalente à 155 mètres cubes d'eau élevés à un mètre. Mais les vis sont mues ou par des manivelles inclinées qui fatiguent beaucoup plus les hommes, ou par des balanciers auxquels il y a lieu de croire qu'ils communiquent moins de force vive; en sorte que je ne crois pas qu'on puisse estimer à plus de 120 mètres cubes d'eau élevés à un mètre la force vive réellement transmise par les manœuvres aux vis. Si on suppose la hauteur moyenne de l'élévation de l'eau de 2 mètres, l'eau aura réellement été élevée à 2m.50; en sorte qu'il y aura un cinquième à retrancher sur la force vive dépensée : cela réduira les 120 mètres cubes d'eau élevés à un mètre de force vive dépensée, à 96 mètres cubes d'eau élevés à la même hauteur. En admettant qu'il y ait 6 mètres cubes d'eau élevés à un mètre, pour représenter les frottemens et les pertes d'eau, l'effet utile serait réduit à 90 mètres cubes, conformément à l'expérience.

Sur les cas où l'équation déduite du principe des vîtesses virtuelles a lieu entre les espaces finis, décrits par les corps, lors des changemens de position d'un systême ; par M. NAVIER, *ingénieur des ponts et chaussées.*

M. Lagrange a observé dans la Mécanique analytique que, pour que l'énoncé du principe des vîtesses virtuelles exprimât dans tous les cas les véritables lois de l'équilibre, il fallait que l'on prît les espaces infiniment petits décrits par chaque point dans le premier instant du mouvement dans le sens de la force qui lui est appliquée. M. Fossombroni, dans un Mémoire imprimé à Florence en 1796, a remarqué qu'il y avait beaucoup de cas où le principe avait lieu en prenant les espaces finis décrits par les corps dans les changemens de situation du systême ; mais il n'a point donné de règle générale au moyen de laquelle on pût distinguer ces cas.

Soit l'équation du principe des vîtesses virtuelles

$$P'dp' + P''dp'' + P'''dp''' + \text{etc.} = 0,$$

dans laquelle dp', dp'', dp''', etc. sont les espaces infiniment petits parcourus par le point d'application de chaque force dans le sens de la direction de cette force, quand le systême change infiniment peu de situation ; et P', P'', P''', etc. des forces qui se font équilibre sur le systême, en satisfaisant à l'équation précédente. On peut l'écrire de cette manière :

$$P'\frac{dp'}{dt} + P''\frac{dp''}{dt} + P'''\frac{dp'''}{dt} + \text{etc.} = 0;$$

et alors $\frac{dp'}{dt}$, $\frac{dp''}{dt}$, $\frac{dp'''}{dt}$, etc. sont des quantités finies, qui représentent les vîtesses que prennent dans le premier instant les points d'application de chaque force dans le sens de sa direction, lorsque l'on imprime un mouvement au systême.

Or il est aisé de voir que si, dans des cas particuliers, les vîtesses $\frac{dp'}{dt}$ $\frac{dp''}{dt}$, etc. restaient constantes lorsque le systême passe d'une position à une autre ; les espaces finis que décrirait chaque point dans les mouvemens du systême, dans le sens des

directions des forces, seraient proportionnels à ces mêmes vitesses. Donc on pourrait substituer ces espaces finis aux vîtesses dans l'équation ci-dessus, sans en changer la nature, et sans qu'elle cessât d'exprimer les conditions de l'équilibre. Il ne reste donc plus qu'à chercher quelle doit être la disposition d'une machine pour que, dans toutes les situations qu'elle peut prendre, les vîtesses virtuelles des points d'application des forces conservent une valeur constante.

Cela posé, soit une machine quelconque en mouvement, à laquelle des forces sont appliquées. Tous les points d'application décrivent, dans un même instant infiniment petit, des petits espaces que je nomme de', de'', de''', etc. Soit θ', θ'', θ''', etc. les angles que la direction de chaque force fait avec l'espace parcouru par son point d'application, on aura

$$dp' = de' \cos \theta',$$
$$dp'' = de'' \cos \theta'',$$
$$dp''' = de''' \cos \theta''',$$
etc.

Or, pour que dp', dp'', dp''', etc. aient des valeurs constantes dans toutes les situations du système, il faut nécessairement, en général, que les valeurs de de', de'', de''', etc. soient constantes, ainsi que celles des angles θ', θ'', θ''', etc.

Pour distinguer maintenant les cas où de', de'', de''', etc. ont des valeurs constantes, on remarquera que $L = 0$, $M = 0$, etc. étant les équations de condition du système, exprimées en fonction des coordonnées x', y', z'; x'', y'', z'' etc. des corps; on obtient, en les différentiant, les équations $dL = 0$, $dM = 0$, etc.; d'où l'on déduit les relations que comporte la nature du système entre les espaces infiniment petits dx', dy', dz'; etc. que chaque corps peut décrire en même tems dans le sens de chacune de ses coordonnées. On a ensuite

$$de' = \sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2},$$
$$de'' = \sqrt{dx''^2 + dy''^2 + dz''^2},$$
$$de''' = \sqrt{dx'''^2 + dy'''^2 + dz'''^2},$$
etc.

pour les espaces effectifs que ces corps décrivent. Or, les valeurs de de', de'', de''', etc. ne peuvent être constantes qu'autant que dx', dy', dz', etc. le seront aussi. Mais il faut pour cela que les équations $dL = 0$, $dM = 0$, etc., d'où les valeurs des différen-

tielles sont déduites, soient indépendantes des coordonnées, et par conséquent que les équations primitives $L = 0$, $M = 0$, soient des fonctions linéaires de ces coordonnées, afin que la différentiation les ait fait disparaître; d'où l'on conclut que les espaces effectifs infiniment petits parcourus en même tems par les différens points, ne peuvent en général avoir des valeurs constantes dans toutes les situations d'une machine, qu'autant que les équations de condition seront des fonctions linéaires des coordonnées. Si cette condition est remplie, et si ensuite la machine est tellement disposée que les directions des forces fassent toujours des angles égaux avec les espaces que décrivent les points d'application, les vîtesses virtuelles seront constantes, et les espaces finis décrits par les corps dans le sens de chaque force, seront proportionnels aux vîtesses virtuelles, et pourront les remplacer dans l'équation d'équilibre.

Il est aisé de voir que lorsque la disposition d'une machine satisfera à ces conditions, les valeurs que ces forces devront avoir pour se faire équilibre, seront les mêmes dans toutes les situations du système. D'ailleurs, le réciproque n'a pas toujours lieu, comme on peut le voir dans l'exemple suivant. Soit un levier aux extrémités duquel sont suspendus deux poids P' et P'', (fig. *a*, pl. 3). Ces poids se font équilibre dans toutes les situations du levier; mais les angles formés par leurs directions avec les arcs que décrivent les points m', m'', varient, et on voit aussi que les poids ne sont point réciproquement proportionnels aux espaces finis décrits par les points m', m'' estimés dans les sens des cordons $m'P'$, $m''P''$; ils le sont seulement aux espaces finis réellement décrits par ces points.

Mais si la condition que les mêmes valeurs des forces se font équilibre dans toutes les situations d'une machine, est réunie à celle que les directions des forces fassent des angles constans avec les espaces que décrivent les corps quand la machine marche, le cas d'exception remarqué par M. Fossombroni a également lieu, et il est aisé de s'assurer que l'existence de deux quelconques des trois conditions que l'on vient d'indiquer, entraîne celle de la troisième.

On peut vérifier ce qui précède sur les machines simples. En considérant d'abord les machines composées de poids suspendus à des cordes, on verra facilement que dans toutes les mouffles ou systêmes de poulies à cordons parallèles, où les équations de condition sont des fonctions linéaires des coordonnées, puisqu'elles expriment seulement que la montée d'un poids est dans un rapport donné avec la descente des autres, et où les directions des forces

se confondent avec les espaces réellement décrits par les corps, ces forces sont aussi toujours en raison inverse des espaces finis parcourus dans le même tems dans le sens de leurs directions, et conservent des valeurs constantes dans toutes les situations du système. Mais lorsque, dans le système de poulies, il y a des cordons qui ne sont point parallèles, alors les équations de condition ne sont plus des fonctions linéaires des coordonnées; et on peut voir sur le système de trois poids P', P'' et P''' (fig. *b*, pl. 3), que quoique chaque force reste toujours dirigée dans le sens de l'espace parcouru par chaque point d'application, les poids ne sont point entre eux dans le cas de l'équilibre en raison inverse des espaces finis qu'ils parcourent en même tems, et les mêmes poids ne se font point équilibre dans toutes les situations du système.

Dans le levier considéré d'une manière générale, les deux premières conditions énoncées ci-dessus ne sont point remplies : aussi ne peut-on point, dans cette machine, mettre les espaces finis à la place des espaces infiniment petits.

Elles le sont dans le système de deux poids posés sur deux plans inclinés adossés et attachés à un même fil : aussi les espaces finis sont-ils proportionnels aux espaces infiniment petits.

Ces conditions sont également remplies dans la vis, où la même proportionnalité a lieu.

On peut donc établir la règle suivante :

Lorsque l'on veut savoir si, dans l'équation générale d'équilibre

$$P'dp' + P''dp'' + P'''dp''' + \text{etc.} = 0,$$

on peut mettre à la place de dp', dp'', dp''', etc. les espaces finis décrits dans un même tems par les corps d'un système, sans que cette équation cesse d'exprimer les véritables lois de l'équilibre, il faut examiner si la disposition du système et des forces qui agissent sur lui est telle,

1°. Que les conditions de la liaison soient des fonctions linéaires des coordonnées, ou, ce qui revient au même, que les rapports des espaces infiniment petits, décrits en même tems par chaque corps, soient constans;

2°. Que les directions des forces fassent constamment les mêmes angles avec les lignes que décrivent leurs points d'application;

3°. Que les valeurs des forces qui se feraient équilibre sur la machine, soient les mêmes dans toutes les situations de cette machine.

Si, sur ces trois conditions, il y en a deux quelconques de remplies, la substitution des espaces finis aux vîtesses virtuelles sera permise.

Application du principe des vîtesses virtuelles, aux machines élémentaires qui ont pour objet de transmettre le mouvement circulaire d'un cercle à un autre cercle, situé ou non dans le même plan que le premier; par M. HACHETTE.

Considérons d'abord deux cercles situés dont les plans sont parallèles, et qui doivent tourner autour de leurs lignes des pôles, comme axes. Ayant mené un plan perpendiculaire à ces lignes, qui les coupe aux points (A et d) (fig. 1, pl. 4), soit menée la droite Ad. Les vitesses de rotation d'un point pris sur chacune des circonférences des cercles donnés, étant connues, on divisera la droite Ad en deux parties AB, Bd, telles que le rapport de ces deux parties soit égal à celui des vîtesses des cercles données. Sur les droites AB, Bd, comme rayons, on décrira deux cercles c et c', et on supposera ces cercles invariablement fixés aux cercles donnés. Nous n'avons plus maintenant à considérer que les deux cercles c et c' situés dans le même plan, et qui doivent tourner autour de leurs lignes de pôles A et d. Pour transmettre le mouvement circulaire du premier cercle au second, supposons qu'on ait fixé sur le premier cercle c une courbe aS qui tourne en même tems que ce cercle, et que cette courbe, considérée comme une rainure infiniment étroite, embrasse un point ou une cheville S située en un point de la circonférence du second cercle c' du rayon Bd et fixe sur ce cercle.

Quel que soit le sens dans lequel on fera tourner le cercle du rayon AD, la courbe aS poussera la cheville S, et le cercle du rayon Bd tournera en même tems. Ce mode de transmission du mouvement circulaire étant admis, on demande quel est le rapport des deux forces (P) et (Q) appliquées tangentiellement aux cercles des rayons AB, Bd, qui se font équilibre. Soient dp et dq les arcs infiniment petits parcourus par les forces P et Q dans le sens de leurs directions; il est évident que, d'après le principe des vîtesses virtuelles, on doit avoir

$$Pdp + Qdq = 0;$$

et à cause que les petits arcs dp, dq sont égaux aux arcs aa', St décrits dans le même tems par les points a et S des circonférences qui ont pour rayons AB et Bd, on aura

$$P.aa' - Q.St = 0;$$

d'où il suit que le rapport de deux forces P et Q est égal à celui

des arcs infiniment petits aa' et St. Donc, si l'on demande que ces deux forces soient égales, il faut qu'on ait

$$aa' = St.$$

Soit Bs l'épicycloïde décrit par le point B, pendant que la circonférence du rayon Bd roule sur le cercle du rayon AB, et supposons que cette courbe tourne en même tems que le cercle du rayon AB : tandis que le point B de cette courbe parcourra l'arc Ba, la cheville S, d'abord en B, décrira l'arc BS. Or, d'après les propriétés de l'épicycloïde, les arcs Ba et BS décrits dans le même tems, sont égaux. Donc les arcs aa' et St décrits dans un même tems infiniment petit, sont aussi égaux; d'où il suit que le forces P et Q qui sont appliquées tangentiellement aux cercles des rayons AB, Bd, et qui se font équilibre, sont égales entre elles. En prenant pour la coulisse aS toute autre courbe que l'épicycloïde, cette égalité n'aura pas lieu; et néanmoins, quelle que soit cette courbe, les deux cercles des rayons AB, Bd tourneront en même tems, par l'action d'une force appliquée tangentiellement à l'un d'eux.

Substituons au mécanisme de la fig. 1 celui de la fig. 2, le cercle du rayon AB porte une courbe ou coulisse aS : le cercle du rayon Bd est coupé suivant un rayon dSS' qu'on peut considérer comme une autre coulisse ou rainure; enfin, une cheville S est un point mobile qui glisse à-la-fois sur les deux rainures aS, dSS'. Quel que soit le sens dans lequel on fera tourner le premier cercle du rayon AB, la courbe aS fixée à ce cercle poussera la cheville, et la cheville poussera le rayon; d'où il suit que le second cercle tournera; et nommant P et Q les forces tangentes aux deux cercles, qui se font équilibre, on aura, comme précédemment,

$$Pdp + Qdq = 0.$$

Supposons maintenant que l'on demande la nature de la courbe ou coulisse aS, pour que les deux forces P et Q soient égales. On satisfera à cette condition en faisant $dp = dq$, ou (fig. 2) $aa' = S't'$, aa' et $S't'$ étant les arcs infiniment petits décrits dans le même tems par les points a et S'; l'un de ces points étant la naissance de la courbe aS sur la circonférence du rayon AB; l'autre, l'extrémité S' de la rainure dS'. Ayant décrit sur Bd, comme diamètre, un cercle, et faisant rouler ce cercle sur le premier cercle donné du rayon AB, le point B engendre l'épicycloïde BS. Cette courbe étant fixée sur le cercle du rayon AB, elle prendra la position aS, et le rayon dS', entraîné par cette courbe, arrivera dans le même tems, en dSS'. Or, suivant les propriétés de l'épicycloïde, les arcs Ba, BS décrits dans le même tems par les points a et B,

sont de même longueur, et tous deux égaux à l'arc BS du diamètre Bd. Donc les arcs infiniment petits aa', $S't'$ décrits dans le même tems, sont aussi de même longueur; donc les forces P et Q qui se font équilibre, sont égales entre elles.

Nous avons considéré deux cercles dont les lignes des pôles sont parallèles; supposons maintenant que ces lignes servant d'axes de rotation se coupent, et comprennent entre elles un angle donné.

Soient (fig. 3, pl. 5) $\omega'L$, $\omega'l$ les lignes des pôles de deux cercles des rayons LM, lm; les longueurs des arcs décrits dans le même tems par les points m et M de ces cercles, sont dans un rapport donné, par exemple de 1 à n, c'est-à-dire, que le point m décrit une circonférence entière du rayon lm, tandis que le point M parcourt la nième partie de la circonférence du rayon LM. Ayant partagé l'angle $L\omega'\omega$ des lignes des pôles en deux autres angles, par une droite $\omega'B$, telle que les perpendiculaires AB, $B\omega$ abaissées d'un point B de cette droite sur les lignes $\omega'L$, $\omega'l$ soient dans le rapport de n à 1, on regardera les deux cercles des rayons AB, $B\omega$ comme fixés, l'un au cercle du rayon LM, l'autre au cercle du rayon lm, et on ne considérera que la transmission du mouvement circulaire du cercle, dont le rayon est AB, au cercle du rayon $B\omega$, en observant que ces deux cercles sont tangens l'un à l'autre, et que leurs plans font entre eux un angle $AB\omega$, supplément de l'angle $A\omega'\omega$ formé par les lignes des pôles qui servent d'axes de rotation.

La fig. 4, pl. 5 représente en perspective les deux cercles des rayons AB, $B\omega$ qui se touchent au point B, et les lignes des pôles autour desquelles ils doivent tourner, sont les droites $A\omega'$, $\omega\omega'$. Une courbe aSa', fixée sur le premier cercle, pousse le second cercle par un point S de sa circonférence. Nommant P et Q les forces appliquées tangentiellement aux deux cercles; dp, dq, les petits arcs décrits dans le même tems par les points de tangence, la condition d'équilibre sera $Pdp - Qdq = 0$. Si l'on demande que les forces P et Q soient égales, il faut qu'on ait dans toutes les positions des deux cercles $dp = dq$. On satisfait à cette dernière condition, en prenant pour la courbe aSa', l'épicycloïde sphérique qui est engendrée par un point du cercle du rayon ωB, et qui a pour base (*) le cercle du rayon AB. Si ce dernier cercle a tourné autour de $A\omega'$ d'un arc quelconque Ba, emportant avec lui l'épicycloïde dont l'origine est un point B, le cercle du rayon $B\omega$ décrira dans le même tems autour de $\omega\omega'$, un arc BS égal en longueur à l'arc Ba (Traité des machines, chap. 2, art. 17). D'où il suit qu'on aura constamment, arc Ba = arc BS, et $dp = dp$.

(*) On appelle *base* d'un épicycloïde, le cercle fixe sur lequel roule le cercle mobile.

Le cercle du rayon AB restant le même, substituons au cercle du rayon Ba (fig. 4), un autre cercle du rayon Bd (fig. 5) qui touche le premier au point B, et supposons que les nouveaux axes de rotation soient les lignes des pôles AH, dH, qui se coupent au point H, le mouvement circulaire du premier cercle pourra se transmettre au second cercle par le mécanisme suivant. Ayant fait une rainure suivant un rayon dS' du second cercle, on fixe sur le premier cercle une autre rainure dont la ligne milieu est la courbe aSa'; une droite inflexible, mobile au tour du point H, passe par le point d'intersection des lignes milieux des deux rainures, et se prolonge au-delà de ce dernier point. Lorsque le cercle du rayon AB tourne, il emporte la courbe aSa', entraîne la droite inflexible, et cette droite fait tourner le cercle du rayon dB. Dans ce mouvement, le point commun aux deux rainures et à la verge inflexible décrit le rayon $S'Sd$, en allant du point S', extrémité de ce rayon, au centre d du cercle; la droite HS' décrit un cône oblique dont le sommet est le point H, et qui a pour base le cercle du diamètre Bd.

Quelle que soit la courbe aSa', la condition d'équilibre entre les forces P et Q tangentes aux cercles des rayons AB, Bd, sera exprimée par l'équation $Pdp - Qdq = 0$, dp et dq étant les petits arcs décrits dans le même tems par les points d'application.

Pour que ces forces soient égales, il faut qu'on ait $dp = dq$, quels que soient les arcs p et q décrits dans le même tems. On satisfait à cette condition en prenant pour la courbe (*) aSa' l'épicycloïde sphérique engendrée par un point d'un cercle qui est situé dans le plan du cercle donné, dont le centre est en d, et dont le rayon ad ou aB est moitié du rayon Bd; la base de cette épicycloïde est le cercle du rayon AB. Si ce dernier cercle tourne d'un arc Ba, la droite HS décrit dans le même tems la portion de cône oblique qui correspond à l'arc BS. Or, cet arc BS (Traité des machines, chap. 2, art. 8) est de même longueur que l'arc BS' d'un rayon double; donc les deux arcs Ba et BS' ou p et q, décrits dans le même tems par deux points des circonférences des rayons AB, Bd, sont constamment de même longueur.

Quel que soit le mécanisme par lequel on fasse tourner deux cercles, le principe des vîtesses virtuelles donne sur-le-champ l'équation de condition qui exprime que les forces appliquées tangentiellement aux cercles sont en équilibre. Il est évident que dans ce cas, les petits espaces parcourus par les points d'applica-

(*) La nature de cette courbe fixée sur le premier cercle, dépend de la forme de la rainure tracée sur le second cercle.

tion des forces, sont dans la direction de ces forces. Si l'on cherchait cette condition d'équilibre par le principe de la composition des forces, le problême serait beaucoup plus compliqué, comme on peut le voir par l'article suivant de M. Ampère, qui a considéré le cas le plus simple, celui de deux cercles situés dans le même plan et tournant autour d'axes parallèles.

« La courbe *OMT* (pl. 4, fig. *a*) tournant librement autour du point *C'*, est soumise, 1°. à l'action de la force *Q* appliquée à un point fixe *M* de cette courbe, perpendiculairement à *C'M*. 2°. à la pression d'un point pouvant seulement glisser sur cette courbe, lié au centre fixe *C*, actuellement en *M*, et sollicité par la force *P*, perpendiculaire à *CM*.

On demande la relation entre *P* et *Q*, dans le cas de l'équilibre. *MN* étant la normale à la courbe *OMT*, et *P* représentée par *MK* étant décomposée en *MN*, et *MU* détruite par le point *C*, $MN = \frac{P}{\cos\varphi}$ presse la courbe suivant la normale; cette force étant décomposée suivant *MS*, et *MR* qui est détruite par le point *C'*, on a

$$MS = MN\cos\psi = \frac{P\cos\psi}{\cos\varphi},$$

et il faut pour l'équilibre que $MS = Q$, ce qui donne

$$P\cos\psi = Q\cos\varphi.$$

La même relation se tire du principe des vîtesses virtuelles : en effet, la force *Q* (pl. 4, fig. *b*) étant appliquée à la courbe tournant autour de *C'*, son point d'application reste à la même distance de *C'* en tournant avec elle; il vient donc en *V*, de manière que l'arc *MV* décrit perpendiculairement à *C'M*, est dans la direction de *Q*, dont le moment $= Q \times MV$. Le point lié à *C* où est appliquée *P*, vient en *Z* en glissant sur la courbe, de manière que l'arc *MZ* perpendiculaire à *CM*, est dans la direction de *P*, dont le moment $= P \times MZ$.

La condition l'équilibre est donc $P \times MZ = Q \times MV$. Mais *MY* étant la partie de la normale en *M*, comprise entre les deux positions de la courbe, on a

$$MZ = \frac{MY}{\cos\varphi}, \qquad \text{et} \qquad MY = \frac{MY}{\cos\psi};$$

la condition de l'équilibre est donc :

$$\frac{P}{\cos\varphi} = \frac{Q}{\cos\psi}, \qquad \text{ou} \qquad P\cos\psi = Q\cos\varphi,$$

comme ci-devant. » (*Fin de l'article de M.* AMPÈRE.)

Sur le cas irréductible, dans les équations du troisième degré; par M. DE STAINVILLE.

Soit l'équation du troisième degré $x^3 - px + q = 0$; pour démontrer que dans le cas irréductible, les trois racines sont réelles, substituons dans cette équation $r\sqrt{\frac{p}{3}}$ à la place de x, on aura une autre équation, qui étant divisée par $\sqrt{\frac{p^3}{27}}$, sera $r^3 - 3r + \frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}} = 0$; mais puisqu'on a $\frac{q^2}{4} < \frac{p^3}{27}$, $\frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}$ sera plus petit que 2. Si donc on représente $\frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}$ par 2ω, ω sera plus petit que l'unité, et la quantité r sera donnée par l'équation $r^3 - 3r + 2\omega = 0$. Si pour r on substitue successivement les nombres -2, -1, 0, 1, 2, les signes des résultats qui correspondent à ces substitutions seront, lorsque ω sera positif $-$, $+$, $+$, $-$, $+$, et lorsque ω sera négatif $-$, $+$, $-$, $-$, $+$; par conséquent dans le cas ou ω est négatif, comme dans celui où il est positif, il y aura trois valeurs de r qui satisferont à l'équation $r^3 - 3r + \frac{q}{\sqrt{\frac{p^3}{27}}}$, et par suite trois valeurs de x qui satisferont à l'équation $x^3 - px + q = 0$.

Le théorême que nous venons de démontrer, n'est qu'un cas particulier d'un autre théorême plus général, et qui consiste en ce que toute équation de degré impair de la forme $x^m + px + q = 0$ à toujours trois racines réelles, et $m - 3$ imaginaires, lorsque $\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1} + \left(\frac{p}{m}\right)^m$ est égal ou plus petit que zéro, et quelle ne peut avoir qu'une seule racine réelle, lorsque $\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1} + \left(\frac{p}{m}\right)^m$ est plus grand que zéro.

Nous observerons d'abord que l'équation dont il s'agit, ne peut

avoir plusieurs racines réelles, à moins que p ne soit négatif, puisque si cela avait lieu, il y aurait au moins une quantité réelle positive ou négative qui satisferait à l'équation $mx^{m-1}+p=0$, qui est la dérivée de la proposée, ce qui n'a pas lieu. Lorsque p est négatif, l'équation $x^m+px+q=0$ ne peut admettre plus de trois racines réelles, puisque si cela avait lieu, la dérivée en admettrait plus de deux, ce qui est impossible.

Si dans l'équation $x^m-px+q=0$, on fait $x=r\sqrt[m-1]{\frac{p}{m}}$, on aura une équation qui étant dégagé du coefficient de la plus haute puissance de r, sera $r^m-mr+\dfrac{q}{\frac{p}{m}\sqrt[m-1]{\frac{p}{m}}}=0$, et comme dans le cas où $\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}-\left(\frac{p}{m}\right)^m$ est <0, on a $\dfrac{q}{\frac{p}{m}\sqrt[m-1]{\frac{p}{m}}}<m-1$; on pourra représenter le dernier terme par $(m-1)\cdot\omega$, ω étant plus petit que l'unité : la réalité des trois racines de l'équation proposée dépendra donc de l'existence de trois racines réelles, dans l'équation $r^m-mr+(m-1)\omega=0$. Si dans cette équation on substitue pour r, 0 et 1, les signes des résultats, lorsque ω est positif, sont de signes contraires. Ainsi l'équation a une racine réelle positive. Si on la divise par le facteur qui correspond à cette racine, on aura une équation de degré pair dont le dernier terme sera négatif, et qui par conséquent aura deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative ; ainsi l'équation précédente a trois racines réelles, dont deux seulement sont positives et l'autre négative. Si ω est négatif, la substitution de 0 et de -1 donnant des résultats de signes contraires, l'équation à une racine réelle négative comprise entre ces deux nombres; si on divise l'équation proposée par le facteur qui correspond à cette racine négative, on aura une équation de degré pair, dont le dernier terme sera négatif, et qui par conséquent aura deux racines réelles, l'une positive et l'autre négative ; donc la proposée aura dans le cas de ω négatif comme dans celui de ω positif, trois racines réelles.

Il reste maintenant a considérer le cas où on aurait........ $\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1}-\left(\frac{p}{m}\right)^m>0$, ce qui revient a supposer ω plus

grand que l'unité dans l'équation $r^m - mr + (m-1)\omega = 0$. Si dans cette équation on substitue $1+\delta$ au lieu de r, le résultat sera positif, tant que δ et ω seront positifs ; ainsi cette équation ne peut avoir de racines positives, et de plus elle ne peut avoir qu'une seule racine réelle négative, puisque si elle en avait plusieurs, elles seraient en nombre impair, et l'équation dérivée en aurait aussi plusieurs, ce qui est impossible. Si ω est négatif et plus grand que 1, elle ne peut avoir de racines négatives ; car si on substitue -1 ou $-1-\delta$, le résultat sera négatif, et comme elle ne peut avoir de racines positives qu'en nombre impair, et que l'équation dérivée ne peut en avoir plus d'une, il en résulte que le théorême est démontré.

On démontrerait de la même manière que dans le cas de m pair, l'équation ne peut avoir plus de deux racines réelles, et qu'il faut, pour que cela ait lieu, qu'on ait

$$\left(\frac{q}{m-1}\right)^{m-1} + \left(\frac{p}{m}\right)^m = \text{ou} > 0.$$

Trigonométrie sphérique; par M. PUISSANT.

M. Delambre a publié dans la *Connaissance de Tems*, pour 1809, pag. 445, de nouvelles formules de trigonométrie sphérique, qui ont été démontrées ensuite par plusieurs géomètres, et qui se trouvent l'être fort simplement dans l'*Abrégé d'astronomie* de ce savant célèbre. Voici quelles sont ces formules, en désignant par A, B, C les angles d'un triangle sphérique, et par a, b, c les côtés qui leur sont respectivement opposés,

$$(1) \qquad \sin\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}c},$$

$$(2) \qquad \sin\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(a-b)\cos\tfrac{1}{2}C}{\sin\tfrac{1}{2}c},$$

$$(3) \qquad \cos\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C}{\cos\tfrac{1}{2}c},$$

$$(4) \qquad \cos\tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}C}{\sin\tfrac{1}{2}c},$$

$$(m) \qquad \sin^2\tfrac{1}{2}C = \frac{\sin\left(\frac{c+b-a}{2}\right)\sin\left(\frac{c+a-b}{2}\right)}{\sin a \sin b},$$

$$(n)\qquad \cos^2 \tfrac{1}{2} C = \frac{\sin\left(\frac{a+b+c}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b-c}{2}\right)}{\sin a \sin b}.$$

On propose de trouver l'expression de l'aire T d'un triangle sphérique en fonction des trois côtés, et ensuite au moyen de deux côtés et de l'angle qu'ils comprennent. Or, on a comme l'on sait (Correspondance, tom. Ier., pag. 274),

$$T = A + B + C - \frac{\pi}{2},$$

π étant la demi-circonférence d'un cercle dont le rayon est l'unité. De là

$$\sin\frac{T}{2} = \sin\left(\frac{A+B+C}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2}\right).$$

Développant le second membre, il vient

$$\sin\frac{T}{2} = -\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2} + \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2},$$

et substituant pour $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$, et $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$ leurs valeurs précédentes, on trouve

$$\sin\frac{T}{2} = \frac{\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}\left[\cos\tfrac{1}{2}(a-b) - \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\right]$$

$$= \frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin\frac{1}{2}C\cos\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c} = \frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C}{\cos\frac{1}{2}c};$$

enfin remplaçant $\sin\frac{1}{2}C$ et $\cos\frac{1}{2}C$ par leurs valeurs déduites des relations (m) et (n), et faisant $2s = a + b + c$ pour abréger, on a

$$\sin\frac{T}{2} = \frac{\sqrt{\sin s \sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c},$$

ce qu'il fallait trouver.

Cherchons en outre l'expression de $\cos\frac{T}{2}$: on a d'abord,

$$\cos\frac{T}{2} = \cos\left(\frac{A+B+C}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{A+B}{2} + \frac{C}{2}\right)$$

$$= \sin\left(\frac{A+B}{2}\right)\cos\frac{C}{2} + \cos\left(\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}.$$

Substituant comme ci-dessus pour $\sin\left(\frac{A+B}{2}\right)$ et $\cos\left(\frac{A+B}{2}\right)$

leurs valeurs, il vient

$$\cos\frac{T}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)\cos^2\frac{1}{2}C+\cos\frac{1}{2}(a+b)\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)+[\cos\frac{1}{2}(a-b)-\cos\frac{1}{2}(a-b)]\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)-2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b(1-2\sin^2\frac{1}{2}C)}{\cos\frac{1}{2}c},$$

ou bien à cause de $\cos C=1-2\sin^2\frac{1}{2}C$,

$$\cos\frac{T}{2}=\frac{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}{\cos\frac{1}{2}c}.$$

Divisant maintenant la valeur rationnelle de $\sin\frac{1}{2}T$ par celle de $\cos\frac{1}{2}T$, on a pour la seconde expression cherchée,

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}T=\frac{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin C}{\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\cos C}=\frac{\text{tang}\,\frac{1}{2}a\,\text{tang}\,\frac{1}{2}b\sin C}{1+\text{tang}\,\frac{1}{2}a\,\text{tang}\,\frac{1}{2}b\cos C},$$

et en série

$$\frac{1}{2}T=\text{tang}\,\frac{1}{2}a\,\text{tang}\,\frac{1}{2}b\sin C-\frac{1}{2}\text{tang}^2\frac{1}{2}b\sin 2C$$
$$+\frac{1}{3}\text{tang}^3\frac{1}{2}a\,\text{tang}^3\frac{1}{2}b\sin 3C-\text{etc.}$$

La valeur précédente de $\cos\frac{T}{2}$ peut se mettre sous une autre forme, ainsi qu'il suit.

De ce que

$$\cos\frac{1}{2}T=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}-\frac{2\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b\sin^2\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}c},$$

il en résulte, lorsqu'on élimine $\sin^2\frac{1}{2}C$, que l'on a

$$\cos\frac{1}{2}T=\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c}-\frac{\sin(s-a)\sin(s-b)}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c};$$

mais $\quad\sin(s-a)\sin(s-b)=\frac{1}{2}(\cos(b-a)-\cos c)$,
ainsi

$$\cos\frac{1}{2}T=\frac{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}(a-b)-\frac{1}{2}\cos(a-b)+\frac{1}{2}\cos c}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c};$$

et comme $\cos(a-b)=2\cos^2\frac{1}{2}(a-b)-1$, le numérateur du second membre de cette équation devient

$$\left[\cos\tfrac{1}{2}(a-b)+\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\right]\cos\tfrac{1}{2}(a-b)-\cos^2\tfrac{1}{2}(a-b)+\tfrac{1}{2}\cos c+\tfrac{1}{2},$$

et se réduit à

$$\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)+\tfrac{1}{2}\cos c+\tfrac{1}{2}=\frac{\cos a+\cos b+\cos c+1}{2};$$

on a donc

$$\cos\tfrac{1}{2}T=\frac{\cos a+\cos b+\cos c+1}{4\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}$$

$$=\frac{\cos^2\frac{1}{2}a+\cos^2\frac{1}{2}b+\cos^2\frac{1}{2}c-1}{2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}.$$

Cherchons maintenant, à l'exemple de M. Legendre (*Géométrie*, note 10), l'expression du rapport $\frac{1-\cos\frac{1}{2}T}{\sin\frac{1}{2}T}$; nous avons

$$\frac{1-\cos\frac{1}{2}T}{\sin\frac{1}{2}T}=\text{tang}\,\tfrac{1}{4}T$$

$$=\frac{1-\cos^2\frac{1}{2}a-\cos^2\frac{1}{2}b-\cos^2\frac{1}{2}c+2\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b\cos\frac{1}{2}c}{\sqrt{\sin s\sin(s-a)\sin(s-b)\sin(s-c)}};$$

or, le numérateur de cette expression étant le développement de la quantité

$$(1-\cos^2\tfrac{1}{2}a)(1-\cos^2\tfrac{1}{2}b)-(\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b-\cos\tfrac{1}{2}c)^2,$$

il s'ensuit qu'il peut être remplacé par le produit

$$\left\{\begin{array}{l}(\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b-\cos\frac{1}{2}c)\\(\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}b-\cos\frac{1}{2}a\cos\frac{1}{2}b+\cos\frac{1}{2}c)\end{array}\right\},$$

ou par cet autre

$$(\cos\tfrac{1}{2}(a-b)-\cos\tfrac{1}{2}c)(\cos\tfrac{1}{2}c-\cos\tfrac{1}{2}(a+b))$$

$$=4\sin\tfrac{1}{2}s\sin\left(\frac{s-a}{2}\right)\sin\left(\frac{s-b}{2}\right)\sin\left(\frac{s-c}{2}\right);$$

mais en général

$$\frac{\sin\frac{1}{2}x}{\sqrt{\sin x}}=\sqrt{\frac{\sin^2\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x\cos\frac{1}{2}x}}=\sqrt{\tfrac{1}{2}\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}x};$$

ainsi nous aurons définitivement la formule suivante due à M. Lhuillier de Genève

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{4}T=\sqrt{\left(\text{tang}\frac{s}{2}\,\text{tang}\left(\frac{s-a}{2}\right)\text{tang}\left(\frac{s-b}{2}\right)\text{tang}\left(\frac{s-c}{2}\right)\right)}.$$

Toutes les formules précédentes sont connues; mais la route qui nous y a conduit est nouvelle, et une des plus directes.

CONCOURS GÉNÉRAL DES LYCÉES DE PARIS, ANNÉE 1813.

PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES (*).

On suppose deux cônes droits qui ont même sommet, même hauteur, et des bases égales.

L'un de ces cônes demeurant fixe, l'autre tourne sur lui, de manière que les arcs de la base du cône mobile, s'appliquent sur des arcs égaux de la base du cône fixe.

Dans ce mouvement un point quelconque de la circonférence de la base du cône mobile engendrera une courbe.

On propose de trouver les équations des projections de cette courbe.

Ensuite de prouver que cette courbe se trouve à-la-fois sur une sphère, et sur un cône droit dont il faut aussi trouver les équations.

PROBLÈME DE PHYSIQUE.

Exposer les lois que suit le calorique dans sa transmission, soit par le rayonnement, soit par communication immédiate, et comment son action est influencée par le poli et l'éclat des surfaces.

Les premiers prix de mathématiques et de physique ont été remportés par M. Duflos, élève du lycée Napoléon, admis cette année (1813) à l'Ecole normale.

(*) Voyez la solution synthétique de cette question, Supplément de la Géométrie descriptive, par M. Hachette, art. 100–105.

§. II. SCIENCES PHYSIQUES.

Analyse d'un second mémoire sur la distribution de l'électricité à la surface des corps conducteurs; par M. Poisson (*).

Les expériences de Coulomb ont démontré que dans les corps parfaitement conducteurs, le fluide électrique se porte en entier à la surface, où il forme une couche très-mince qui ne s'étend pas sensiblement dans leur intérieur. L'épaisseur de cette couche, sur un corps de forme donnée, ou sur plusieurs corps soumis à leur influence mutuelle, varie d'un point à un autre suivant une loi que l'analyse mathématique peut seule déterminer. Son application à ce genre de questions est fondée sur un principe général que j'ai établi dans mon premier Mémoire, et qui a également lieu, soit que chacun des corps que l'on considère soit recouvert, dans toute son étendue, par un même fluide, soit qu'au contraire, par suite de leur influence mutuelle, un ou plusieurs d'entre eux soient recouverts en partie par le fluide *vitreux*, et en partie par le fluide *résineux*. Voici l'énoncé le plus général de ce principe :

» Si plusieurs corps conducteurs électrisés sont mis en pré« sence les uns des autres, et qu'ils parviennent à un état élec« trique permanent, il faudra, dans cet état, que la résultante « des actions des couches électriques qui les recouvrent, sur un « point pris quelque part que ce soit dans l'intérieur de l'un de « ces corps, soit égale à zéro. »

Si, en effet, cette force n'était pas nulle, elle agirait sur le fluide naturel que contiennent ces différens corps; une nouvelle quantité de ce fluide serait décomposée, et leur état électrique se trouverait changé. D'ailleurs, quand cette force est nulle, on fait voir aisément que la couche électrique qui recouvre chaque corps, est en équilibre à sa surface; de sorte que notre principe renferme la seule condition à laquelle il soit nécessaire d'avoir égard.

(*) *Voyez* l'extrait du premier Mémoire sur le même sujet, tome II de la *Correspondance*, page 468. Le second Mémoire a été lu à l'Institut, le 6 septembre 1813.

On en déduit, dans chaque cas particulier, autant d'équations que l'on considère de corps conducteurs, et que le problème présente d'inconnues. Les équations, pour le cas de deux sphères, sont à différences variables et à deux variables indépendantes; si l'on en considérait trois ou un plus grand nombre, dont les centres ne fussent pas rangés en ligne droite, on serait conduit à des équations du même genre, contenant trois variables indépendantes; et l'on peut remarquer que cette espèce d'équations se présente ici, pour la première fois, dans les applications de l'analyse.

J'ai formé, dans mon premier Mémoire, les équations relatives au cas de deux sphères placées à une distance quelconque l'une de l'autre; et après avoir montré comment on peut les réduire à des équations ordinaires à différences variables et à une seule variable indépendante, je me suis borné à les résoudre complètement dans deux hypothèses particulières : lorsque les deux sphères se touchent, et quand, au contraire, la distance qui sépare leurs surfaces est très-grande par rapport à l'un des deux rayons. Maintenant je reprends la question où je l'avais laissée, et je donne les intégrales générales des deux équations du problême, d'abord sous forme de séries, et ensuite sous forme finie au moyen des intégrales définies. Par la nature de ces équations, leurs intégrales contiennent une fonction arbitraire périodique; ce qui semblerait indiquer que le problème est indéterminé, ou que la distribution du fluide électrique, dont la loi dépend de ces intégrales, peut avoir lieu d'une infinité de manières différentes; mais on démontre rigoureusement que cette fonction est étrangère à la question, et qu'il faut supprimer le terme qui la contient : faisant donc abstraction de ce terme, on obtient des séries qui ne renferment plus que des quantités déterminées, dans chaque cas, par les données de la question, et qui représentent l'épaisseur de la couche électrique, ou, ce qui est la même chose, l'intensité de l'électricité, en tel point qu'on veut sur l'une ou l'autre surface. Excepté le cas où les deux sphères sont très-rapprochées l'une de l'autre, ces séries sont très-convergentes, et comme, d'après l'expression de leur terme général, elles tendent rapidement vers des progressions géométriques, il est facile d'en obtenir des valeurs aussi approchées qu'on le juge convenable. Pour en montrer l'usage, j'ai pris un exemple particulier : j'ai choisi le cas de deux sphères électrisées d'une manière quelconque, dont les rayons sont entre eux comme 1 et 3, et dont le surfaces sont séparées par un intervalle égal au plus petit des deux rayons. On trouvera, dans mon Mémoire, des tableaux qui contiennent les épaisseurs de la couche élec-

trique, calculées, à moins d'un *dix millième* près, en 9 points différens, sur chacune de ces deux sphères, savoir : aux points extrêmes qui tombent sur la ligne des deux centres, et en d'autres points répartis uniformément entre ces extrêmes. L'inspection des tableaux suffira pour montrer si l'électricité croît ou décroît sur l'une des deux sphères, depuis le point le plus rapproché de l'autre, jusqu'au point le plus éloigné; on verra également si l'électricité est par-tout de même nature, ou si elle change de signe sur une même surface; et, dans ce dernier cas, on saura vers quel point tombe la ligne de séparation des deux fluides.

Ces diverses circonstances dépendront des quantités totales de fluide électrique de l'une ou de l'autre espèce, dont les deux sphères sont chargées; on pourra donner à ces quantités telles grandeurs et tels signes que l'on voudra; et si, par exemple, on en fait une égale à zéro, on aura le cas où l'une des deux sphères est électrisée par la seule influence de l'autre, et l'on connaîtra en même tems l'effet de la réaction de la sphère influencée sur la sphère primitivement électrisée. Lorsque c'est la plus petite des deux sphères prises pour exemple, qui est électrisée par influence, la grande présente une circonstance digne d'être remarquée : l'électricité diminue sur sa surface, depuis le point le plus voisin de la petite sphère, jusqu'à environ 75° centigrades de ce point; puis son intensité augmente jusqu'au point diamétralement opposé; de manière que l'épaisseur de la couche électrique, sans changer de signe sur cette surface, atteint son *minimum* vers le 75ᵉ. degré. Au reste, en égalant entre elles les épaisseurs qui répondent à deux points différens sur une même sphère, et déterminant par cette équation le rapport des quantités d'électricité dont les deux sphères sont chargées, on pourra produire à volonté un semblable *minimum*, lequel tombera quelque part entre les deux épaisseurs rendues égales. Je donne, dans mon Mémoire, un second exemple de ce *minimum* que je produis en rendant égales les épaisseurs extrêmes sur la petite sphère. Ce cas particulier est encore remarquable en ce que l'épaisseur de la couche électrique est presque constante, et ne varie pas d'un *vingt-cinquième* au-dessus ou au-dessous de la moyenne, dans toute l'étendue de la petite sphère; de sorte qu'elle se maintient en présence de la grande sphère électrisée, à-peu-près comme si elle n'en éprouvait aucune influence; circonstance due, non pas à la faiblesse de l'électricité sur la grande sphère, mais à une sorte d'équilibre entre son action sur la petite et la réaction de celle-ci sur elle-même. On verra aussi que, dans ce cas, l'électricité répandue sur la grande surface, passe du positif au négatif, et éprouve des variations d'intensité très-considérables.

Il serait desirable que l'on pût comparer ces résultats du calcul à des expériences précises, ainsi que je l'ai fait dans mon premier Mémoire, à l'égard des expériences de Coulomb, sur le contact des sphères électrisées; mais je n'ai trouvé, ni ailleurs, ni dans les Mémoires de cet illustre physicien, la suite d'observations nécessaires à cette comparaison. Ces Mémoires ne contiennent qu'un seul fait qui se rapporte à l'influence mutuelle de deux sphères séparées; c'est le phénomène dont j'ai déja parlé dans mon premier Mémoire, et qui consiste en ce que, si l'on a deux sphères inégales, qui soient d'abord en contact et électrisées en commun, par exemple, positivement; que l'on vienne ensuite à les séparer, et que l'on observe la nature du fluide électrique qui afflue sur l'une et sur l'autre, au point par lequel elles se touchaient, on trouve que ce point, dont l'électricité était nulle pendant le contact, donne, à l'instant de la séparation, des signes d'électricité, contraires sur les deux sphères, savoir, d'électricité positive sur la plus grande, et d'électricité négative sur la plus petite. Celle-ci subsiste jusqu'à ce que les deux surfaces soient à une certaine distance l'une de l'autre; à cette distance, l'électricité du point de la petite sphère le plus voisin de la grande, redevient nulle, comme à l'instant du contact, et au-delà elle passe au positif. La distance dont nous parlons dépend du rapport des deux rayons; Coulomb l'a déterminée par l'expérience pour des sphères de différentes dimensions : je l'ai aussi calculée dans mon premier Mémoire, mais pour le cas seulement où l'un des deux rayons est très-petit par rapport à l'autre; et l'on a vu qu'alors le résultat du calcul est conforme à celui de l'observation. Il paraît difficile de déterminer cette distance *à priori*, lorsque les rayons des deux sphères que l'on sépare ont entre eux un rapport donné; mais quand on l'aura trouvé par l'expérience, il sera toujours facile de vérifier, au moyen de nos formules, si, à cette distance, l'électricité de la petite sphère, au point le plus voisin de la grande, est effectivement égale à zéro. On trouvera, dans la suite de ce Mémoire, un exemple de cette vérification, faite sur une expérience de Coulomb, et remarquable par l'accord qu'elle montre entre l'observation et la théorie.

Les séries qui représentent les épaisseurs de la couche électrique, cessent de converger, lorsque les deux sphères sont très-rapprochés l'une de l'autre; pour les appliquer à ce cas, il a donc fallu leur donner une autre forme; et en effet, par le moyen de leur expression en intégrales définies, je suis parvenu à les transformer en d'autres séries d'autant plus convergentes que la distance des deux sphères est plus petite. De cette manière, j'ai pu déterminer ce qui arrive dans le rapprochement

de ces deux corps, soit avant qu'ils se soient touchés, soit quand on les a d'abord mis en contact, et qu'on vient ensuite à les séparer.

Dans le premier cas, l'épaisseur de la couche électrique aux points les plus voisins sur les deux surfaces, devient plus grande et croît indéfiniment à mesure que leur distance diminue; il en est de même de la pression que le fluide exerce contre l'air intercepté entre les deux corps, puisque cette pression, ainsi qu'on l'a vu dans mon premier Mémoire, est toujours proportionnelle au carré de l'épaisseur; elle doit donc finir par vaincre la résistance de l'air; et le fluide, en s'échappant sous forme d'étincelle ou autrement, doit passer, avant le contact, d'une surface sur l'autre. Ce fluide, ainsi accumulé avant l'étincelle, est de nature différente et à-peu-près d'égale intensité sur les deux sphères; si elles sont électrisées, l'une *vitreusement* et l'autre *résineusement*, il est *vitreux* sur la première et *résineux* sur la seconde; mais quand elles sont toutes deux électrisées de la même manière, et, par exemple, positivement, la sphère qui contient moins de fluide qu'elle n'en doit avoir dans le contact, devient négative au point où se prépare l'étincelle, et, au contraire, celle qui en contient plus qu'elle n'en doit conserver, reste positive dans toute son étendue.

Les phénomènes ne sont plus les mêmes dans le second cas, c'est-à-dire lorsque les deux sphères se sont touchées et qu'on les a ensuite un tant soit peu écartées l'une de l'autre. Le rapport qui existe entre les quantités totales d'électricité dont elles sont chargées, fait disparaître, dans l'expression de l'épaisseur, le terme qui devenait infiniment grand pour une distance infiniment petite: l'électricité des points les plus voisins sur les deux surfaces, est alors très-faible pour de très-petites distances; elle décroît avec ces distances, suivant une loi que j'ai déterminée; son intensité est à-peu-près la même sur les deux sphères; mais quand elles sont inégales, cette électricité est positive sur l'une et négative sur l'autre, et c'est toujours sur la plus petite qu'elle prend un signe contraire à celui de l'électricité totale; résultat entièrement conforme à l'expérience de Coulomb que j'ai citée plus haut, et qui fournit une confirmation importante de la théorie des deux fluides. Quand les deux sphères sont égales, l'électricité, pendant le contact et après la séparation, se distribue de la même manière sur l'une et sur l'autre; il est naturel de penser que, dans ce cas, le fluide est de même nature sur toute l'étendue de chaque surface, quelque petite que soit la distance qui sépare les deux sphères: c'est, en effet, ce qu'on déduit de nos formules, en y supposant les deux rayons égaux.

J'ai aussi considéré ce qui arrive, dans le rapprochement des deux sphères, aux points les plus éloignés sur leurs surfaces. On trouvera, dans mon Mémoire, des formules qui expriment, pour des distances très-petites, les quantités d'électricité relatives à ces points; elles montrent que l'épaisseur de la couche électrique qui leur correspond, tend vers une limite constante, à mesure que les deux sphères se rapprochent, et que cette limite est l'épaisseur qui aurait lieu aux mêmes points, à l'instant du contact. Ces mêmes formules font voir en même tems que la quantité qu'elles représentent, converge en général très-lentement vers sa limite; de sorte que, pour des distances extrêmement petites, l'électricité des points les plus éloignés sur les deux surfaces, diffère encore beaucoup de ce qu'elle sera dans le contact ou après l'étincelle; d'où nous pouvons conclure que l'étincelle, quand elle a lieu à une distance sensible, change la distribution du fluide électrique dans toute l'étendue des deux surfaces, et jusqu'aux points diamétralement opposés à ceux où elle se produit.

Extrait des rapports faits par MM. Delambre *et* Cuvier, *sur les travaux de la Classe des sciences physique et mathématiques, pendant l'année* 1813.

Baromètre portatif d'une construction nouvelle; par M. Gay-Lussac.

Ce baromètre est à syphon; ce qui le distingue de tous ceux qu'on a connus jusqu'à ce jour, c'est qu'il est entièrement exempt de robinets, de vis ou de pistons. La branche la plus courte est fermée à son extrémité; mais à deux ou trois centimètres au-dessous de cette extrémité, se trouve un petit trou capillaire qui suffit au libre passage de l'air, mais trop petit pour que le mercure puisse s'échapper, même quand il vient à passer sur cette ouverture.

Cette branche est réunie à la plus longue par un tube dont le diamètre intérieur est d'un millimètre environ, et dont la longueur de la courbure est de deux à trois décimètres. Cette disposition a l'avantage que s'il s'engageait de l'air dans la courbure du baromètre pendant le transport, le mercure le chasserait devant lui lorsqu'on renverserait l'instrument, ce qui n'aurait pas lieu si le tube était plus large.

Froid artificiel : cristallisation.

On a vu (Correspondance, tom. 2, pag. 289) comment, en accélérant l'évaporation par le vide et par la présence d'un corps très-absorbant, M. Leslie d'Edimbourg était parvenu à faire congeler l'eau en toute saison. Ce physicien a imaginé depuis un appareil qui a été montré à la classe par M. Pictet, et où l'on peut à volonté, et instantanément, faire congeler l'eau ou lui rendre sa liquidité. Pour cet effet, on place de l'eau sous la cloche pneumatique, dans un vase dont le couvercle se lève ou s'abaisse au moyen d'une tige qui traverse le haut de la cloche; lorsqu'on découvre cette eau, cédant à l'action des causes qui la vaporisent, elle se gèle, et, quand on la recouvre, la chaleur environnante la rend en peu d'instans à son premier état.

Notre confrère M. Gay-Lussac, qui a répété devant la classe l'expérience de M Leslie, a rappelé un fait bien connu, qui rentre dans le même ordre; c'est le froid qui se produit dans certaines machines d'où on laisse échapper de l'air condensé; il a prouvé qu'en toute saison il suffit que l'air ait été condensé du double pour donner de la glace; et il croit qu'on pourrait s'en procurer aisément ainsi dans les pays chauds, en condensant l'air au moyen d'une chûte d'eau.

On peut, en employant des corps plus évaporables que l'eau, arriver à des degrés de froid véritablement étonnans, et à faire geler non-seulement le vif-argent, mais l'esprit-de-vin le plus pur; c'est à quoi est parvenu M. Hutton, d'Édimbourg, qui a remarqué à cette occasion que, dans l'alcool le plus rectifié, la congélation séparait encore des matières assez différentes. M. Configliacchi, professeur à Pavie, a congelé le mercure par la seule évaporation de l'eau. Nous devons également la première communication de ces expériences à M. Pictet.

On croyait que cette pression de l'air, dont l'influence est si puissante pour retarder l'évaporation des liquides, retardait aussi la dissolution des sels, ou, ce qui revient au même, accélérait leur cristallisation quand ils étaient dissous; et en effet, une dissolution saturée de sel de glauber, ou sulfate de soude qui conserve sa liquidité quand elle refroidit dans le vide, cristallise aussitôt qu'on lui donne de l'air; mais M. Gay-Lussac s'est assuré qu'il s'en faut de beaucoup qu'il en arrive autant à tous les sels, et que même, pour le sulfate de soude, le phénomène ne tient point à la cause qu'on alléguait. Quand on intercepte le contact de l'air par une couche d'huile, par exemple, la cristallisation se retarde comme lorsqu'on supprime sa pression en faisant le vide; tandis qu'au contraire la pression d'une colonne de mercure

n'accélère en rien cette cristallisation. Une dissolution qui traverse du mercure dont l'air a été chassé par l'ébullition, ne cristallise point, et si elle traverse du mercure ordinaire, elle se prend aussitôt. Des secousses, l'introduction d'un petit cristal, et beaucoup d'autres causes, déterminent la cristallisation, quelle que soit la pression. Ainsi, M. Gay-Lussac conclut que ce n'est point par sa pression que l'air diminue le pouvoir dissolvant de l'eau. Il s'est assuré aussi que ce n'est point en absorbant de l'air que l'eau perd de ce pouvoir ; mais il pense que c'est un phénomène plus ou moins analogue à celui de l'eau pure, qui, comme on sait, reste liquide à quelques degrés au-dessous de son vrai point de congélation, toutes les fois que l'on peut empêcher qu'elle ne soit agitée, et qui se prend aussitôt qu'on lui imprime le plus léger choc.

Substance nouvelle, découverte par M. Courtois.

MM. Clément et Desormes ont montré cette substance à la classe, et M. Gay-Lussac a fait sur elle des expériences instructives. On la retire des eaux mères de la soude du vareck par l'acide sulfurique et la distillation. Refroidie et condensée, elle a le grenu, le brillant et la couleur grisâtre de la plombagine. Tant qu'elle n'a pas été purifiée, elle se fond à soixante-dix degrés de chaleur; mais quand on l'a purifiée en la dissolvant en excès par la potasse, et en la distillant, elle ne fond qu'à une chaleur beaucoup plus forte. Sa propriété la plus frappante est de s'élever en une vapeur, ou plutôt en un gaz du plus beau violet, parfaitement homogène et transparent.

Nouveau Traité de chimie.

M. Thenard a fait paraître le premier volume d'un Traité élémentaire de Chimie, où cette science qui fait journellement tant de progrès, et à qui M. Thenard lui-même en a fait faire de si grands, se trouve exposée dans son état du moment. L'auteur y range les faits d'après le degré de simplicité des corps auxquels ils appartiennent. Après y avoir parlé des agens impondérables, il traite de l'oxigène et de la théorie de la combustion, et passe ensuite aux corps combustibles, à leurs combinaisons entre eux, et à celles qu'ils contractent un à un avec l'oxigène. Ces dernières se divisent, selon leurs propriétés, en oxides et en acides, et les acides fluorique et muriatique y sont rangés d'après les idées ordinaires qui en font des corps oxigénés. C'est à eux que s'arrête cette première partie d'un ouvrage que la marche rapide de la science a rendu nécessaire sitôt après d'autres bons ouvrages sur le même sujet, et dont on ne peut que desirer vivement la prompte terminaison. (*Fin de l'extrait.*)

Note sur la polarisation de la lumière électrique ; par M. Hachette.

Un corps faiblement électrisé ne présente aucun phénomène lumineux ; en augmentant la tension du fluide électrique sur ce même corps, la lumière devient sensible. Cette lumière est-elle un élément particulier du fluide électrique, ou le fluide électrique même ? ne diffère-t-elle pas de la lumière émanée du soleil, ou n'en est-elle qu'une modification ?

Cette question est restée jusqu'à présent indécise. On lit dans l'Histoire de l'électricité, de Priesteley, le passage suivant : (Traduction française de 1711, tom. III, pag. 448.)

Observations sur les couleurs de la lumière électrique.

Voyant que plusieurs électriciens ont avancé dans leurs écrits que la lumière électrique ne contenait pas les couleurs prismatiques, j'eus la curiosité d'essayer un fait si extraordinaire, et aussitôt je m'aperçus de l'illusion de l'expérience que l'on avait faite la première fois, et de la cause de cette illusion. En tenant un prisme devant mes yeux, tandis que l'on tirait des étincelles électriques au principal conducteur, je remarquai d'aussi belles couleurs prismatiques que puisse en donner l'image du soleil ; mais quand la lumière fut un peu étendue, comme dans les parties rouges et pourpres d'une longue étincelle, ces couleurs ne furent plus si vives, et on les distingua moins facilement les unes des autres, et quand *la lumière fut encore plus étendue, comme dans le vide*, le prisme ne fit aucun changement sensible dans son apparence (*). C'est ainsi que la partie du milieu d'un grand objet quelconque, paraît au travers d'un prisme de sa couleur naturelle : car quoique les rayons soient réellement séparés, ils sont sur-le-champ confondus avec d'autres, qui viennent de différentes parties du même objet ; de sorte qu'il en doit nécessairement résulter sa couleur naturelle.

Comme les flammes de différens corps donnent les couleurs prismatiques, dans des proportions très-différentes, j'ai souvent essayé d'entreprendre de déterminer la proportion de ces couleurs dans la lumière électrique, et de la comparer avec la proportion des couleurs, venant de la lumière qu'on pourrait se procurer de différentes autres manières. Cela déterminerait peut-être ce que c'est

(*) Ce changement est au moins aussi sensible dans le vide que dans l'air.

que cette *matière hétérogène*, qui est mise en action par le passage rapide du fluide électrique, et qui est la cause de la lumière, de l'odeur, et des autres *qualités* sensibles de l'électricité.

Le traducteur ajoute la note suivante, relative à cette dernière phrase ; « ce n'est point une matière hétérogène, mise en action par le fluide électrique qui produit la lumière ; c'est le fluide électrique lui-même, qui s'enflamme par le choc de ses propres rayons. A l'égard de l'odeur, elle est produite par une matière jusqu'à présent inconnue. »

« Dans un Mémoire de Wollaston sur la réfraction et la dispersion de la lumière, imprimé dans les Transactions philosophiques, année 1802, on lit le passage suivant : « En regardant une ligne bleue de la lumière électrique, j'ai trouvé que le spectre était aussi séparé en plusieurs images ; mais les phénomènes diffèrent un peu des précédens. Il serait inutile de s'attacher à décrire en détail les apparences qui varient suivant l'éclat de la lumière : je n'entreprendrai point de les expliquer. » (*Voyez* Annales de chimie, tom. XLVI, pag. 61.)

En 1805, M. Biot a émis cette opinion très-ingénieuse, que la lumière électrique lui paraissait le simple résultat de la compression que l'air et les vapeurs éprouvent, quand elles sont traversées par l'électricité. (*Voyez* les Annales de chimie, 21 mars 1803, tom. LIII, pag. 321 ; et la Physique mécanique de Fischer, 2. édition, note de la pag. 247.) Pour admettre cette opinion, il faut supposer que lorsque l'air ou les vapeurs sont très-rares, comme dans le vide des bonnes machines pneumatiques, ou du tube barométrique ; le même volume de gaz devient une source de lumière, en prenant aux corps environnans du calorique, et en transformant ce calorique en lumière ; ce qui n'est pas encore démontré, et d'ailleurs, ne s'accorde pas avec les expériences de M. de Saissy, qui semblent prouver que le gaz oxigène est le seul gaz qui devienne lumineux par compression.

En novembre 1812, je répétai les expériences de Priesteley et de Wollaston, dont je n'avais pas alors connaissance, et j'y ajoutai ce fait que j'ai communiqué à la Classe des sciences physiques, que la lumière électrique se polarise sous le même angle que la lumière solaire ; ce qui paraît confirmer que ces deux lumières sont identiques, ou qu'elles ne diffèrent entre elles que par de légères modifications.

Expériences sur la polarisation de la lumière électrique.

Ire. EXPÉRIENCE.

On place sur le conducteur d'une machine électrique, un bout de fil de fer d'un petit diamètre, coupé perpendiculairement à sa longueur; on observe la lumière qui se dégage de ce fil de fer, avec un prisme de cristal de roche à faces parallèles et à double réfraction. Quelle que soit la position de la section principale du prisme par rapport à la lumière blanche électrique, on voit deux images de l'extrémité du fil de fer; mais si l'on place près de ce fil, une lame de verre, disposée de manière qu'elle réfléchisse la lumière sous un certain angle, cette lumière réfléchie est polarisée, c'est-à-dire, qu'étant vue à travers le prisme dans le plan de la section principale; elle ne présente plus qu'une seule image. On polarise de la même manière la lumière purpurine électrique du vide.

IIe. EXPÉRIENCE.

On place à l'extrémité du fil de fer de l'expérience précédente, le bout de la flamme d'une bougie, et on cherche la position de la glace, qui convient à la polarisation de cette flamme. Ayant enlevé la bougie, on fait tourner le plateau de la machine électrique, qu'on suppose toujours dans un lieu obscur, et la lumière électrique blanche ou purpurine, est aussi dans la position la plus avantageuse pour la polarisation.

Notice historique sur la composition de l'eau.

Extrait d'une lettre insérée dans le journal de Paris, du 8 novembre 1813.

On regarde la *composition de l'eau* comme la découverte la plus importante de ce siècle dans les sciences physiques. L'histoire des progrès de la physique, dont vous parlez dans votre feuille de ce jour, cite Cavendish, comme l'unique auteur de cette découverte; les Français peuvent aussi en réclamer l'honneur. On lit page 41, quatrième volume de l'ouvrage de M. Libes, que ce fut le 15 juillet 1784, que Cavendish annonça à la société royale que l'air inflammable allumé par l'étincelle électrique, brûlait dans des vaisseaux clos, en lui fournissant successivement l'air vital nécessaire à sa combustion, qu'il en absorbait une quantité déterminée, et que le résultat était de l'eau, dont le poids egalait celui des deux airs évanouis. La note, page 203 du même volume, apprend que

Cavendish a fait toutes ses expériences sur l'explosion des gaz hydrogène et oxigène pendant l'été de 1781.

Il est bien notoire que dès 1780, M. Monge, professant la physique à l'école du génie de Mézières, répétait l'expérience du pistolet de Volta, en plongeant dans l'eau l'orifice du pistolet fermé par un bouchon, et il faisait observer à son auditoire qu'après la décharge de la bouteille de Leyde, le vase se remplissait d'eau; d'où il concluait que les deux airs contenus dans le vase servant de pistolet, se combinaient et formaient un liquide. L'appareil propre (*) à recueillir ce liquide et à mesurer les quantités de gaz employés, n'a été disposé qu'en 1783. Le Mémoire de M. Monge, contenant le résultat des expériences faites avec cet appareil, a été lu à l'académie de Paris en juin 1783, et imprimé quelques années après dans le volume de cette académie, année 1783. Les premières expériences de M. Monge sont donc au moins aussi anciennes que celles de Cavendish, et son Mémoire est antérieur d'environ sept mois.

Quant aux expériences de Lavoisier sur la composition de l'eau, elles ont été communiquées à l'académie de Paris en novembre 1783 et avril 1784; et c'est par une circonstance particulière qu'elles ont été publiées dans le volume de 1781, environ deux ans avant l'impression du volume, année 1783, qui contient le Mémoire de M. Monge.

Pour ne rien laisser desirer sur cette partie intéressante de la physique, je rapporterai le passage suivant de l'éloge de M. Cavendish, par M. le chevalier Cuvier, secrétaire perpétuel de l'Institut :

« Ce grand phénomène (la composition de l'eau) que M. Caven-
« dich avait mis trois années à constater, fut annoncé à la société
« royale, le 14 janvier 1784. Notre confrère (M. le comte de
« Peluse) Monge, qui avait eu la même idée, et fait de son côté
« les mêmes expériences que M. Cavendish, en communiqua à-peu-
« près vers le même tems le résultat à Lavoisier et à M. le comte
« de Laplace. »

Problême de physique, proposé par M. Biot.

M. Charles s'est servi depuis longtems dans ses cours d'un instrument qu'il appelle *hydromètre thermométrique*, et qui n'est autre chose qu'un grand aréomètre de verre très-mince, que l'on

(*) On conserve dans le cabinet de physique de l'Ecole Polytechnique, les vases de cette appareil.

a rendu extrêmement sensible en lui donnant un col très-fin. On a tracé sur ce col un trait pour servir de marque constante, et lorsqu'on plonge l'instrument dans l'eau distillé à diverses températures, on trouve qu'il faut placer sur son chapeau, des poids divers pour le faire enfoncer jusqu'à la marque.

Cela posé, on donne 1°. le poids P de l'instrument réduit au vide; 2°. le poids additionnel p, qu'il a fallu mettre sur son chapeau pour le faire enfoncer jusqu'à la marque, lorsqu'il était plongé dans l'eau distillée à la température t; et on demande 1°. de déterminer par le calcul tous les autres poids additionnels qui conviendront à une autre température assignée; 2°. de déterminer à quelle température l'instrument s'enfoncera de lui-même sans qu'il soit besoin d'y ajouter aucun poids.

Ceci suppose que l'on connaît les dilatations de l'eau et du verre. D'après les expériences de MM. Lavoisier et Laplace, la dilatation cubique du verre est 0,00003284 pour un degré de Réaumur, et on peut la supposer proportionnelle à la température comptée depuis zéro. La dilatation de l'eau est variable, et en nommant t la température mesurée par le thermomètre à mercure, on peut la représenter par

$$at + bt^2 + ct^3,$$

a, b, c étant des coefficiens constans, dont les valeurs sont,

$$a = -0{,}000054878,$$
$$b = +0{,}0000101395,$$
$$c = -0{,}000000027080.$$

On peut même supposer que le poids de l'hydromètre réduit au vide n'est pas connu, et qu'on a seulement son poids dans l'air, et son poids additionnel p dans l'eau, à la température de 5° de Réaumur, voisine du *maximum* de condensation; car avec cette donnée, on peut calculer d'une manière suffisamment exacte, la réduction au vide en s'appuyant sur ce résultat, qu'à la température de la glace fondante et sous la pression de $0^m,76$, le poids d'un centimètre cube d'air atmosphérique sec, est à Paris de 0,001299541 gramme.

Pour appliquer ces résultats à un exemple, on peut choisir l'instrument même de M. Charles.

Son poids dans l'air est 90,303 grammes; lorsqu'il est plongé dans l'eau distillée à la température de 5° de Réaumur, il faut pour le faire enfoncer jusqu'à la marque, ajouter sur son chapeau un poids de 1,330 gramme.

Classe des sciences physique et mathématiques de l'Institut.

Sujets des prix proposés pour les années 1815 et 1816.

1er. Théorie des oscillations des lames élastiques.

2°. Théorie de la propagation des ondes, à la surface d'un fluide pesant, d'une profondeur indéfinie.

Chaque prix est une médaille d'or de 3000 francs. Les mémoires de concours ne seront reçus que jusqu'au 1er. octobre de l'année 1814 pour le premier prix, et de l'année 1815 pour le second.

---

§. III.

Projets et Notices sur les travaux hydrauliques des environs de Paris, dirigés par MM. les Ingénieurs des ponts et chaussées.

Projet pour l'établissement d'une gare à Choisy. — Notice descriptive du pont de Choisy; par M. *Navier*. 1 vol. *in*-4°., mai 1811, avec quatre planches, dont l'une représentant les environs de Paris, est jointe à ce cahier.

Canal de l'Ourcq.

Rapport à l'assemblée des ponts et chaussées, sur le projet général du canal de l'Ourcq; par M. *Girard* (octobre 1803).

Résumé du rapport.

1°. Le canal de l'Ourcq remplira en même tems les fonctions d'un aqueduc, et celle d'un canal de navigation;

2°. Envisagé sous le premier point de vue, le canal de l'Ourcq doit amener des eaux salubres dans la capitale, et pour être telles, leur vîtesse ne peut être moindre de 35 centimètres par seconde;

3°. Considéré comme navigable, le canal de l'Ourcq doit conserver sur toute sa longueur, une hauteur d'eau constante, sans le secours d'écluses, n'y d'aucun autre barrage;

4°. La plus grande quantité d'eau sur laquelle on puisse compter pour alimenter ce canal, sera de 13500 pouces, ou de 250820 kilolitres par 24 heures;

5°. La prise de la rivière d'Ourcq sera faite dans le bief supérieur du moulin de Mareuil, à 96 kilomètres de la barrière de Pantin;

6°. La pente totale de ce canal de dérivation entre ses deux extrémités est de 10,14 mètres. (Voyez la carte, pl. 6.)

Sur la quantité d'eau amenée à Paris par les acqueducs, ou par les machines.

M. Deparcieux pensait qu'il fallait au moins un pouce d'eau (ou 19047 litres par 24 heures) pour mille habitans. Dans un Mémoire qu'il a écrit en 1762 sur la possibilité d'amener à Paris les eaux de l'Yvette, il estime la population de Paris de 800 mille habitans : à cette époque, on y amenait au plus 230 pouces, savoir :

1°. Par la pompe du pont Notre-Dame, de 100 à 125 pouces, au plus	125 p^ces^.
2°. Par Arcueil, de 40 à 50 pouces.	50
3°. Par la Samaritaine, de 25 à 30 pouces.	30
4°. Par les sources du pré St.-Gervais.	15
5°. Par Belleville.	10
Suivant M. Deparcieux, 1762	230 p^ces^.
En 1777, MM. Perrier obtinrent un privilége pour l'établissement de pompes à feu qui devaient élever de différens points de la Seine, environ 26000 kilolitres d'eau (environ 1366 pouces) en 24 heures.	1366 p^ces^.
TOTAL	1596 p^ces^.
Le seul canal de l'Ourcq doit amener à Paris	13500 p^ces^.

Canal Saint-Maur, sur la Marne. (Voy. pl. 6, *CD.*)

Le projet de construire à Saint-Maur, près de Paris, un canal de navigation, fut conçu par M. le chevalier Bruyère, maître des requêtes et directeur des travaux publics. Un décret impérial du 29 mars 1809 en ordonna l'exécution. Des dispositions préliminaires commencèrent au mois d'août de la même année ; mais ce ne fut qu'en 1811 que les travaux furent poussés avec une grande activité.

Le canal, dont la direction est du nord au sud, raccourcit la navigation de la rivière de la Marne d'environ quatre lieues. Il est composé de deux parties : la première, qui traverse une butte, présente une galerie souterraine de la longueur de 600 mètres ; la seconde, à ciel ouvert, et qui se trouve dans les prairies de la commune de Saint-Maurice, a la même longueur. On construira, de chaque côté de cette partie du canal, des moulins à moudre les

blés pour l'approvisionnement de Paris. Le canal servira également de gare aux bateaux pendant l'hiver.

Le canal souterrain est formé par une voûte, en plein cintre, de 5 mètres de rayon. La largeur est de 8 mètres. Une grande partie du parement est en meulières, et l'autre en moëllons piqués. On regrette que cette voûte ne soit pas en pierres de taille.

Le chemin de hallage, établi sur la rive droite, a 2 mètres de largeur; il s'élève à 5 mètres au-dessus du fond du canal.

Les pieds droits de la voûte sont taillés dans une masse de pierre : il ne reste plus, pour l'achèvement du canal souterrain, à l'intérieur, que l'enlèvement des déblais provenant de cette masse qui a environ 400 mètres de longueur sur 5 de hauteur. Pour la faire disparaître, on emploie de la poudre : on casse ensuite les blocs avec des masses et des coins de fer.

L'extrados de la voûte est couvert d'une chappe, composée de mortier et de pierres de meulières concassées, et sur laquelle on a établi une couverture en tuiles fixées avec du ciment. Une couche de sable étendue sur cette couverture, facilite l'écoulement des eaux pluviales; des remblais placés sur le sable forment une route ou avenue plantée d'arbres et qui régnera sur toute la longueur du canal souterrain.

La plus grande profondeur des fouilles pour la partie souterraine, c'est-à-dire depuis le point le plus élevé de la butte jusqu'au fond du canal, est de 80 pieds; et la largeur, dans le haut de la butte, d'environ 60 pieds.

Le canal à ciel ouvert est construit de chaque côté en pierres de meulières. L'extrémité méridionale sera terminée par une écluse qui rachètera une pente de 12 pieds.

A l'entrée du canal souterrain, au nord, est une porte de garde destinée à empêcher les grandes eaux et les glaces d'entrer dans ce canal. La voûte a été achevée le 17 septembre 2813. Ce canal pourra être achevé et livré au commerce dans deux ans.

Renseignemens communiqués par M. H.-C. EMERY, *ancien élève de l'Ecole polytechnique, ingénieur des ponts et chaussées.*

Ier. *Pente de la Marne.*

1°. Le contour de la Marne dans le développement de cette rivière, compris entre les deux extrémités du canal et mesurée exactement, a donné 12900 mètres.

2°. La pente totale de la Marne, sur toute cette longeur, est de 3.50 mètres, ce qui donne 0.271 de pente par 1000.00 mètres. C'est cette différence de niveau qui forme la chute du canal de Saint-Maur à son écluse d'aval.

IIe. *Section de la Marne.*

Les expériences pour la section et la vîtesse de la Marne, ont été faites dans une partie de cette rivière de 250 mètres de longueur, en ligne droite, et située en amont de la grande île attenante au pont de Saint-Maur.

Le pertuis étant ouvert et les eaux étant à l'étiage, on a trouvé,

La section de	200.00 mètres carrés.
La largeur en gueule	65.00 mètres.
La hauteur d'eau de la section	3.30 mètres.

Nota. Lorsque le pertuis et fermé, il résulte environ 0.20 mètre d'augmentation de hauteur d'eau.

IIIe. *Vîtesse de la Marne.*

1re. *Expérience.* Le pertuis étant *bouché*, et la crue des eaux étant de 0.16 au-dessus de l'étiage;

Quatre expériences ont été faites avec des boules de cire, dans le milieu de la rivière.

Les boules ont employé pour parcourir 250 mètres, un tems réduit de 10′ — 40″.

La vîtesse à la superficie donnée par les expériences était donc de 0.391 par seconde.

2e. *Série d'expériences.* Le pertuis étant *ouvert*, et la crue des eaux étant de 0.40 au-dessus de l'étiage;

Dix-huit flotteurs placés sur différens points de la rivière, ont employé pour parcourir 250.00 mètres, un tems réduit de 9′—31″.

La vîtesse à la superficie donnée par ces expériences était donc de 0.438 par seconde.

3e. *Série d'expériences.* Le pertuis étant ouvert, et la crue des eaux étant de 0.36 au-dessus de l'étiage;

La première expérience a été faite sur la rive gauche de la rivière, à 4.00 mètres de distance du bord; la boule de cire a employé 16′ à parcourir 250.00 mètres: *vîtesse par seconde* 0.26 *mèt.*

Les 2e., 3e., 4e. et 5e. expériences ont été faites à 14.00 mètres, 24.00 mètres, 34.00 mètres, 44.00 mètres du bord.

Elles ont peu différé les unes des autres; la réduite a été 8′-36″. Ce qui présenterait une vîtesse à la superficie de 0.484 par seconde.

La 6e. expérience essayée à 54.00 mètres de distance du bord, n'a pu être faite que sur 200.00 mètres.

Sur cette longueur, la vitesse de la boule a été de 0.339. A la distance de 200.00 mètres, la boule a été arrêtée par des herbes qui indiquaient un haut-fond.

IVe. *Renseignemens divers sur le canal de Saint-Maur.*

1°. La largeur de passage de la cunette du souterrain, est de 8.00 mètres;

2°. La hauteur d'eau, à la porte de garde et sur le busc de cette écluse, doit être dans les plus basses eaux de 1.00.

Cette section sera augmentée par un barrage qui sera probablement construit en aval de la prise d'eau, et qui soutiendra les eaux à 0.50 au-dessus de l'étiage;

3°. Les eaux seront soutenues à la hauteur de la Marne supérieure, dans toute la longueur du canal, et jusqu'à l'écluse placée à l'extrémité aval de cette dérivation;

4°. Section moyenne de la Marne . . . . 200.80 mètres carrés.
Vitesse moyenne, par seconde. . . . . 0.343 mètre.
Produit dans les basses eaux, par seconde. . 68.87 mètres cubes.

ANNONCE D'OUVRAGES.

Journal de l'Ecole Polytechnique, publié par le Conseil de l'instruction de cet établissement, XVIme. cahier, 1 vol. in-4°., imprimerie impériale 1813.

Ce cahier contient, 1°. Théorie mathématique de l'action capillaire; par M. *Petit;*

2°. Deux Mémoires de M. *J. Binet*, l'un sur la Théorie des momens d'inertie des corps, l'autre sur un Système de formules analytiques;

3°. Trois Mémoires de M. *Cauchy*, les deux premiers sur les polyèdres, le troisième sur les nombres;

4°. Deux Mémoires de M. *Poisson*, l'un sur les intégrales définies, l'autre sur un cas particulier du mouvement de rotation des corps pesans;

5°. Un Mémoire sur le contact des sphères, annoncé page 368 du 2e. volume de la Correspondance; par M. *Gaultier*, de Tours;

6°. Théorie et description de l'héliostate; par M. *Hachette.*

Exposition très-abrégée de l'Art de la guerre ; par M. *Duhays*, ancien chef de bataillon du génie, instituteur à l'Ecole Polytechnique. 1 vol. in-8°., sans planches. Paris 1813.

Nouveau précis des Leçons d'architecture, données à l'Ecole impériale Polytechnique ; par M. *J.-N.-E. Durand*. 1 vol. in-4°., contenant 32 planches. Paris 1813.

Lettres à une princesse d'Allemagne, sur divers sujets de physique et de philosophie ; par M. *Léonard Euler* ; conforme à l'édition original de l'académie des sciences de Saint-Pétersbourg : revue et augmentée de diverses notes ; par M. *J.-B. Labey*, docteur ès-sciences de l'Université impériale, instituteur à l'Ecole Polytechnique, etc. — Précédée de l'éloge d'Euler ; par M. *de Condorcet*. 2 vol. in-8°. Paris 1812. Ces lettres ont été écrites à Berlin, du 19 avril 1760 au 18 mai 1762, pour madame la princesse *d'Anhalt-Dessau*, nièce du roi de Prusse. Euler né à Bâle, le 15 avril 1707, est mort à Saint-Pétersbourg, le 7 septembre 1783.

Développemens de géométrie, avec des applications à la stabilité des vaisseaux, aux déblais et remblais, au défilement, à l'optique, etc. Pour faire suite à la Géométrie descriptive, et à la Géométrie analytique de M. Monge ; par M. *Ch. Dupin*, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, membre de plusieurs sociétés savantes, capitaine du génie maritime. 1 vol. in-4°. Paris 1813, *dédié à M. Monge, membre de l'Institut.*

Cet ouvrage comprend cinq Mémoires.

1er. *Mémoire*. Osculation des surfaces ; courbure des surfaces et de celle de leurs sections ; théorie des tangentes conjuguées.

2e. et 3e. *Mémoires*. Théorie des tangentes conjuguées ; de l'indicatrice.

4e. *Mémoire*. Propriétés générales des surfaces trajectoires orthogonales, relatives à la courbure des surfaces.

5e. *Mémoire*. Théorie des surfaces trajectoires orthogonales, appliquée à la détermination des lignes de courbure.

Ces Mémoires présentés à l'Institut en décembre 1812, ont été déclarés dignes de l'approbation de la Classe des sciences physique et mathématiques.

Expériences sur la flexibilité, la force et l'élasticité des bois, avec des applications aux constructions en général, et spécialement à la construction des vaisseaux, faites dans l'arsenal de la marine française, à Corcyre, en 1811; par M. *Ch. Dupin*, capitaine en premier au corps du génie maritime.

Premier mémoire, présenté à la Classe des sciences physique et mathématiques, et approuvé le 19 juillet 1813.

Ce Mémoire paraîtra dans le XVIIe. cahier du journal de l'Ecole qui est sous presse.

Essai sur la science des machines; par M. *A. Guenyveau*, ancien élève de l'Ecole Polytechnique, ingénieur des mines.

Des moteurs; des roues hydrauliques; des machines à colonnes d'eau; du bélier hydraulique; des machines à vapeurs; des hommes et des animaux. 1 vol. in-8°. de 287 pages. Lyon 1810.

Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal, seconde édition. 1 vol. in-8°. 1813; par M. *Carnot*, membre de la légion d'honneur; de l'Institut impérial de France; du conseil de perfectionnement de l'Ecole Polytechnique, etc. 1 vol. in-8°. Paris 1813.

Calcul différentiel et intégral, 2e. édition, 2e. vol., 1814; par M. *F.-F. Lacroix*.

Traité élémentaire de trigonomètrie rectiligne et spérique, et d'application de l'algèbre à la géométrie; par *le même*, 6e. édition, revue et corrigée. 1 vol. in-8°. Paris 1813.

(Voyez l'annonce des autres ouvrages de M. Lacroix, pag. 479, 2e. vol. de la Correspondance.)

Application de l'algèbre à la géométrie; Traité des surfaces du second degré; par MM. *Monge* et *Hachette*. 1 vol. in-8°. Paris 1813.

Traité de chimie élémentaire, théorique et pratique; par M. *L.-J. Thenard*, professeur à l'Ecole impériale Polytechnique, etc., premier et deuxième volumes.

Les 31 planches jointes à ces deux premiers volumes, ont été dessinées par M. Girard, qui avait déja donné des preuves de son talent pour la description graphique des appareils de chimie ou physique, dans le Manuel de chimie de M. Bouillon-Lagrange.

DESCRIPTION DE L'ÉGYPTE.

On a publié dans le premier volume de la Correspondance, pag. 459, les noms des personnes attachées à l'École Polytechnique, qui ont fait partie de l'expédition d'Egypte, sortie de Toulon le 18 mai 1798, sous le commandement du général en chef Bonaparte; on a omis de citer M. Costaz, examinateur d'admission à l'Ecole Polytechnique, et M. Lepère, adjoint à l'inspecteur des études. Le gouvernement a, par un décret du 6 février 1802, nommé une commission séant à Paris, pour réunir tous les matériaux recueillis en Egypte, sur l'administration, les arts et les sciences. Le 21 mai suivant, S. E. le ministre de l'intérieur, Chaptal, a pris un arrêté qui organise les travaux de cette commission (1). Nous allons faire connaître les titres des Mémoires contenus dans les deux premières livraisons de la description de l'Egypte, et dont les auteurs ont été, pour la plupart, ou élèves de l'École Polytechnique, ou attachés à cet établissement. A la lecture de ces Mémoires, on sera pénétré de reconnaissance et d'admiration pour les savans et les artistes qui, sur le théâtre même de la guerre, ont recueilli des matériaux aussi précieux et en aussi grand nombre, tant sur l'histoire ancienne que sur la géographie.

Premiere livraison, publiée en janvier 1808 *et mars* 1810; 1300 *pages de texte grand in-folio, et* 170 *planches grand atlas.*

DESCRIPTION D'ANTIQUITÉS.

Description de l'île de Philæ; par feu *Michel-Ange Lancret.*
Description de Syène et des cataractes; par *E. Jomard.*
Description de l'île d'Éléphantine; par *le même.*
Description d'Ombos et des environs; section 1re., par *le même.*
section 2e., par *Rozière.*
Description des antiquités d'Edfoû; par *E. Jomard.*
Description des ruines d'El-Kàb ou Elethyia; par *Saint-Genis.*
Description d'Esné et de ses environs; par *Jollois* et *Devilliers.*
Description d'Erment ou Hermonthis; par *E. Jomard.*
Note sur les restes de l'ancienne ville de Buphium, faisant suite au chap. VIII; par *Costaz.*

---

(1) *Président de la commission*, M. Berthollet.
Secrétaire, M. Jollois.
Commissaire du gouvernement, M. Jomard.

MÉMOIRES D'ANTIQUITÉS.

Mémoire sur le Nilomètre de l'ile d'Eléphantine, et les mesures égyptiennes; par M. *Girard*.

Mémoire sur l'agriculture, sur plusieurs arts, et sur plusieurs usages civils et religieux des anciens Egyptiens; par M. *Costaz*.

Mémoire sur le lac Mœris comparé au lac du Fayoum; par M. *E. Jomard*.

Mémoire sur les vases murrhins qu'on apportait jadis d'Egypte, et sur ceux qui s'y fabriquaient; par M. *Rozière*.

De la géographie comparée, et de l'ancien état des côtes de la Mer-Rouge, considérés par rapport au commerce des Egytiens dans les différens âges; par *le même*.

Mémoire sur le zodiaque nominal et primitif des anciens Egyptiens; par M. *Remi Raige*.

Dissertation sur les diverses espèces d'instrumens de musique que l'on remarque parmi les sculptures qui décorent les antiques monumens de l'Egypte, et sur les noms que leur donnèrent, en leur langue propre, les premiers peuples de ce pays; par M. *Villoteau*.

MÉMOIRES D'ÉTAT MODERNE.

Nota. Voyez la table générale de l'état moderne, 2ᵉ. livraison.

HISTOIRE NATURELLE.

Histoire naturelle des poissons du Nil; par M. *Geoffroy-St.-Hilaire*.

Description du palmier doum de la Haute-Egypte, ou *cucifera Thebaïca*; par M. *Delile*.

Réflexions sur quelques points de comparaison à établir entre les plantes d'Egypte et celles de France; par feu M. *Coquebert*.

Système des oiseaux de l'Egypte et de la Syrie; par *Jules-César Savigny*.

Seconde livraison, publiée en mars 1813; 1500 pages de texte grand in-folio, et 275 planches grand atlas.

DESCRIPTION D'ANTIQUITÉS.

Description générale de Thèbes :

Introduction, par MM. *Jollois* et *Devilliers*.

Section 1ʳᵉ. Description des édifices de l'hippodrome de Medyn et Abou; par *les mêmes*.

Sect. II. Description des colosses de la plaine de Thèbes et des ruines qui les environnent, et recherches sur le monument dont ils faisaient partie ; par *Jollois* et *Devilliers*.

Sect. III. Description du tombeau d'Osymandias, désigné par quelques voyageurs, sous la dénomination de *Palais de Memnon* ; par *les mêmes*.

Sect. IV. Description du temple de l'ouest, ou du temple d'Isis ; par *les mêmes*.

Sect. V. Description des ruines situées au nord du tombeau d'Osymandias ; par *les mêmes*.

Sect. VI. Description des ruines de Qournah ; par *les mêmes*.

Sect. VII. Description des ruines de Louqsor ; par *les mêmes*.

Sect. VIII. Description du palais, des propylées, des avenues de sphinx, des temples, et de diverses autres ruines de Karnak ; par *les mêmes*.

Sect. IX. Description des ruines de Med-Amond ; par *les mêmes*.

Sect. X. Description des hypogées de la ville de Thèbes ; par *E. Jomard*.

Sect. XI. Description des tombeaux des rois ; par M. *Costaz*.

Dissertation sur la position géographique et l'étendue de Thèbes, et recherches historiques relatives à cette ancienne capitale ; par MM. *Jollois* et *Devilliers*.

APPENDICE AUX DESCRIPTIONS.

N°. 1. Description des carrières qui ont fourni les matériaux des monumens anciens, avec des observations sur la nature et l'emploi de ces matériaux ; par M. *Rozière*.

N° 2. Description des monumens astronomiques découverts en Egypte ; par MM. *Jollois* et *Devilliers*.

MÉMOIRES D'ANTIQUITÉS.

Notice sur les embaumemens des anciens Egyptiens ; par *J.-C. Rouyer*.

De la géographie comparée, et de l'ancien état des côtes de la Mer-Rouge, considérés par rapport au commerce des Egyptiens dans les différens âges (seconde partie), par M. *Rozière*.

Notice sur la branche canopique ; par feu *Michel-Ange Lancret*.

MÉMOIRES D'ÉTAT MODERNE.

Observations astronomiques faites en Egypte pendant les années 1798, 1799 et 1800; par M. *Nouet.*

Mémoire sur la communication de la mer des Indes à la Méditerranée, par la Mer-Rouge et l'isthme de Soueys; par M. *Lepère.*

Mémoire sur les anciennes limites de la Mer-Rouge; par M. *Dubois-Aymé.*

Mémoire sur la ville de Qoçeyr et ses environs, et sur les peuples Nomades qui habitent cette partie de l'ancienne Troglodytique; par *le même.*

Mémoire sur l'art de faire éclore les poulets en Egypte, par le moyen des fours; par MM. *Rozière* et *Rouyer.*

Mémoire sur le système d'imposition territoriale, et sur l'administration des provinces de l'Egypte, dans les dernières années du gouvernement des Mamlouks; par feu *Michel-Ange Lancret.*

Notice sur les médicamens usuels des Egyptiens; par M. *Rouyer.*

Mémoire sur le lac Menzaleh, d'après la reconnaissance faite en vendémiaire an 7 (septembre et octobre 1799); par M. le général *Andréossy.*

Mémoire sur la vallée des lacs de Natroun, et celle du fleuve sans eau, d'après la reconnaissance faite les 4, 5, 6, 7 et 8 pluviose an VII (23, 24, 25, 26 et 27 janvier 1799); par *le même.*

Mémoire sur les finances de l'Egypte, depuis sa conquête par le sultan Sélym Ier. jusqu'à celle du général en chef Bonaparte; par M. le comte *Estève.*

Mémoire sur la Nubie et les Barâbras; par M. *Costaz.*

Observations sur la fontaine de Moïse; par M. *Monge.*

Description de l'art de fabriquer le sel ammoniac; par M. *Collet-Descostils.*

Mémoires et observations sur plusieurs maladies qui ont affecté les troupes de l'armée française pendant l'expédition d'Egypte et de Syrie, et qui sont épidémiques dans ces deux contrées; par M. le baron *Larrey.*

Mémoire sur les inscriptions koufiques recueillies en Egypte, et sur les autres caractères employés dans les monumens arabes; par M. *Marcel.*

Observations sur les Arabes de l'Egypte moyenne ; par *E. Jomard.*

Mémoire sur les tribus arabes des déserts de l'Egypte ; par M. *Dubois-Aymé.*

De l'état actuel de l'art musical en Egypte, ou relation historique et descriptive des recherches et observations faites sur la musique en ce pays ; par M. *Villoteau.*

Description historique, technique et littéraire des instrumens de musique des orientaux ; par *le même.*

ÉTAT MODERNE, *tom.* II.

Notice sur la conformation physique des Egyptiens et des différentes races qui habitent en Egypte, suivie de quelques réflexions sur l'embaumement des momies ; par M. le baron *Larrey.*

Mémoire sur la partie occidentale de la province de Bahyrch, connue anciennement sous le nom de *nome Maréotique* ; par M. *Gratien Lepère.*

Notice sur la préparation des peaux en Egypte ; par M. *Boudet.*

Mémoire sur le Meqyâs de l'île de Roudah, et sur les inscriptions que renferme ce monument ; par *J.-J. Marcel.*

HISTOIRE NATURELLE.

Mémoire sur les plantes qui croissent spontanément en Egypte ; par M. *Delile.*

Histoire des plantes cultivées en Egypte ; par *le même.*

Description de la vallée de l'Égarement, et conséquences géologiques qui résultent de la reconnaissance qu'on en a faite ; par *P.-S. Girard.*

Discours sur la représentation des roches de l'Egypte et de l'Arabie par la gravure, et sur son utilité dans les arts et dans la géologie ; par M. *Rozière.*

Floræ Ægyptiacæ illustratio ; *auctore* A.-R. Delile.

Description minéralogique de la Vallée de Qoçyr ; par M. *Rozière.*

Description des mammifères qui se trouvent en Egypte ; par M. *Geoffroy-St.-Hilaire.*

Note sur la part qu'ont eue les anciens élèves de l'Ecole Polytechnique au voyage d'Egypte, et à la composition de l'ouvrage qui se publie sur cette contrée.

L'Ecole Polytechnique a fourni à l'expédition d'Egypte, non-seulement quarante de ses anciens élèves, mais plusieurs de ses professeurs les plus distingués, et, dans le nombre, les deux plus illustres de ses fondateurs, MM. Monge et Berthollet. Aussi, l'influence des études et des méthodes admises dans cette Ecole, s'est fait sentir dans toutes les branches de l'expédition scientifique, et encore plus dans l'exécution de l'ouvrage qui est le fruit commun de tous les travaux réunis. L'habitude de la précision rigoureuse dans la recherche de la vérité a présidé à toutes les observations. On s'est attaché a recueillir les mesures les plus exactes des édifices. Rien ne manque aux projections qu'on en a faites pour reconstruire ces monumens à une échelle quelconque, et en offrir une image fidèle. Par-tout où il en a été besoin, on a fait des fouilles profondes, afin d'avoir des données sûres et complètes sur le sol des édifices. L'on a fait des nivellemens multipliés dont plusieurs embrassent une grande étendue de pays. Enfin ce voyage est certainement celui d'où l'on a rapporté le plus de mesures de tout genre.

L'esprit d'exactitude qui a guidé les ingénieurs et les architectes n'a pas été étranger aux dessinateurs. Ils avaient à retracer des formes nouvelles, extraordinaires, et les signes d'un langage perdu. Ces signes sont les hiéroglyphes et les caractères alphabétiques remplissant, les uns, la surface des monumens, les autres, une multitude de manuscrits dont l'existence n'était pas même soupçonnée jusqu'à ce jour. Entièrement inconnus aux voyageurs qui les dessinaient, les hiéroglyphes exigeaient de leur part une patience à l'épreuve, et un amour de l'exactitude, capables de triompher de tous les obstacles. Mais ils sentaient que ces copies des tableaux égyptiens et des hiéroglyphes seraient absolument inutiles, si elles n'étaient pas des imitations rigoureuses, seul moyen de conduire à leur interprétation, soit par des rapprochemens multipliés, soit par la comparaison des autorités avec les monumens.

L'ordre qui règne dans la distribution des parties de l'ouvrage est le fruit du même esprit qui a présidé à la recherche des matériaux. On ne présente pas seulement les différens monumens suivant l'ordre des lieux; mais dans chacun d'eux, on suit constamment la même marche. Le plan général du lieu donne d'abord

une idée générale. Aux plans succèdent des vues pittoresques dont l'objet est le même; ensuite, viennent le plan géométrique de l'édifice, ses élévations, ses coupes mesurées et cotées, les détails principaux de l'architecture, les corniches, les colonnes et leurs chapitaux. Après ces détails, on donne les sculptures, les bas-reliefs, les peintures, les scènes hiéroglyphiques avec les caractères qui les accompagnent, et cette série de figures est souvent terminée par une perspective géométrique où l'on restaure l'édifice pour en donner une idée complète. Mais cette restauration n'est jamais faite que sur les motifs les plus évidens. Le tracé des ombres, celui des perspectives, ont fourni des occasions fréquentes d'appliquer les méthodes enseignées à l'Ecole. Quand au dessin de l'architecture et de la figure, l'expédition d'Egypte suffirait pour démontrer l'utilité de cette partie de l'enseignement.

Il aurait manqué un avantage essentiel à cette composition des planches, si tous les monumens n'eussent pas été assujétis à la même échelle. Rien de plus commun dans les voyages, que la manie de grandir tous les petits édifices, pour leur faire occuper sur le papier le même espace que les plus grands. Rien aussi ne donne des idées plus fausses; et delà vient que le plus souvent on retire peu de fruit de ces ouvrages à figures. On a, dans le voyage d'Egypte, adopté des échelles uniformes et invariables, tant pour les plans que pour les coupes et les détails. Une légère inspection suffit pour comparer les édifices les plus différens. L'idée première de cette uniformité des échelles appartient à un recueil qui a servi aux études de l'Ecole Polytechnique, et qui est l'ouvrage de l'un de ses professeurs (M. Durand).

On avait à craindre un écueil fâcheux pour la symétrie des planches, dans la multitude de sujets différens et de mains différentes, copiées parmi les tableaux égyptiens. C'est avec un soin particulier, mais toujours en s'attachant à l'exactitude scrupuleuse, qu'on est parvenu à éviter les disparates et à donner aux figures partielles tout l'ensemble et toute la symétrie convenables.

Le texte consacré à décrire les anciens édifices et à suppléer à l'insuffisance des dessins, a été assujéti au même plan, à la même marche. Les *Descriptions des antiquités* correspondent, une à une, avec les monumens, et forment un chapitre séparé, comme l'ensemble des planches forme, pour chaque lieu, un faisceau à part. Comme les séries de planches, la *description* renferme d'abord un coup d'œil général; elle marche ensuite par des développemens de plus en plus circonstanciés, jusqu'à rendre compte des scènes particulières et de tous les objets de détail.

Les *Mémoires d'antiquités* forment une branche séparée de l'ouvrage et complettent tout ce qui regarde l'ancien état de l'Egypte. Ils sont consacrés à l'examen de questions particulières : ce sont des dissertations ou des recherches faites *ex-proffesso ;* tandis que les descriptions ont pour objet spécial de faire connaître l'état des édifices ; et qu'on n'y entre dans des discussions, que quand le sujet l'exige ou les amène naturellement.

Il convenait, dans la publication de recherches faites d'une manière authentique et devant tant de témoins, de ne rien épargner pour conserver l'exactitude des dessins originaux, et les exécuter d'une manière uniforme. C'est à quoi l'on s'est attaché en surveillant sans relâche la gravure, confiée à plus de cent artistes. L'atelier central établi près de la commission a été d'un grand secours pour arriver à ce but ; et sur-tout l'invention précieuse d'une machine à graver, inventée par feu *Conté*, qui a rendu tant de services en Égypte, et qui fut le premier directeur des travaux de l'ouvrage. Le nom de Conté et ses travaux ingénieux se rattachent encore à l'Ecole Polytechnique, puisqu'il fut le chef d'une école d'application, celle de Meudon, dont quelque élèves sortaient de la première. Avec cette machine on gradue rigoureusement les teintes égales, ou décroissantes suivant différentes lois.

Les élèves de l'Ecole Polytechnique ont encore concouru à d'autres travaux qui avaient trait directement à leurs études, telles que les observations astronomiques, les mesures météorologiques, les recherches de physique et de chimie ; enfin, et principalement le levé d'une carte géométrique et très-détaillée de toute l'Egypte, depuis les cataractes jusqu'à la méditerranée. C'est entre ces travaux et les dessins des monumens anciens et modernes que les ingénieurs ont partagé tout leur tems, pendant la durée de l'expédition. La carte d'Egypte est composée de cinquante feuilles, grandes comme celles de Cassini et non moins détaillées qu'elles, assujéties à trente six observations célestes. A cette carte sont jointes des plans topographiques en grand nombre, et des plans du Kaire et d'Alexandrie, levés et dessinés avec les mêmes détails que les plans qu'on possède des grandes villes de France.

Les édifices modernes, ouvrages des Arabes, et des Égyptiens devenus mahométans, offraient un moindre intérêt que les monumens antiques ; cependant ils n'ont pas été négligés : on a dessiné les plus importans, toujours avec le même soin, mais avec moins de détails. Les élèves de l'Ecole n'ont pris qu'une part secondaire à cette seconde branche de l'ouvrage consacrée à l'*état moderne* de l'Egypte, à l'exception de la partie géographique.

Il en est de même de l'*Histoire naturelle*. Cette troisième partie

de la collection générale, est due à des naturalistes étrangers à l'Ecole, excepté M. Dupuis, minéralogiste. Cependant plusieurs des élèves se sont attachés, en Egypte, à recueillir des animaux, des minéraux et des plantes, et se sont empressés d'en rapporter des échantillons pour le cabinet de l'Ecole. M. Lancret s'est occupé d'entomologie ; M. Jomard de botanique et de minéralogie ; M. Dubois a aussi recueilli des plantes.

Toutes les descriptions d'antiquités sont l'ouvrage des élèves de l'Ecole. Les plus importantes sont de la main de MM. Chabrol, Devilliers, Jollois, Jomard et Lancret. MM. Dubois-Aymé et Saint-Genis en ont rédigé plusieurs.

Le nivellement des deux mers, travail capital, est encore pour la plus grande partie, l'ouvrage des élèves de l'Ecole Polytechnique. M. Lepère, ancien adjoint à l'inspecteur des études, a été le rédacteur de ce travail.

En résumant cette note, il est aisé de voir que le voyage d'Egypte, et la composition de l'ouvrage destiné a décrire ce pays ont fourni l'application la plus complette de toutes les études de l'Ecole Polytechnique, soit sous le rapport des sciences physique et géométriques, soit du côté des arts graphiques. J.

§. IV. PERSONNEL.

Lagrange (Joseph-Louis), auteur de la *Mécanique analytique*, né le 25 novembre 1736, a terminé sa carrière honorable le 10 avril 1813. Les deux ouvrages de ce célèbre géomètre, la *Théorie des fonctions analytiques*, et le *Calcul des fonctions*, ont été le sujet des leçons qu'il a données à l'Ecole Polytechnique, en 1795, 1796 et 1799. Il fut nommé professeur dans cet établissement, à l'époque de sa fondation (1794). Depuis l'année 1799, il n'a plus professé ; mais désigné par l'Institut pour l'un des membres du conseil de perfectionnement, il en a suivi exactement les séances, et il a toujours considéré l'Ecole Polytechnique comme une institution très-utile aux progrès des sciences.

La classe des sciences physique et mathématiques a nommé, pour remplacer M. Lagrange, dans la section de géométrie, M. Poinsot, professeur adjoint à l'Ecole Polytechnique (séance du 31 mai 1813), et dans le conseil de perfectionnement de cette Ecole, M. Carnot.

Extrait d'une lettre concernant M. Lagrange, insérée dans le Moniteur du 26 février 1814.

. . . .

Comme on peut être curieux de connaître la série de ses premiers travaux, je vais, d'après lui, la rapporter dès-à-présent. Il étudia d'abord l'arihmétique, les élémens d'Euclide, et l'algèbre de Clairaut; puis, *en moins de deux ans*, il lut dans l'ordre où je les énonce: les Institutions de Mlle. Agnesi, l'*Introductio* d'Euler, les Leçons de Jean Bernonilli, la Mécanique d'Euler, et les deux premiers livres des Principes de Newton, la Dynamique de d'Alembert, le Calcul intégral de Bougainville, enfin le Calcul différentiel et le *Methodus inveniendi* d'Euler. Ce fut, comme on le sait, l'étude de ce dernier ouvrage qui le conduisit à découvrir le calcul des variations.

. . . .

En parlant du *bonheur* de Newton qui avait trouvé *un systéme du Monde à expliquer* (bonheur, remarquait-il d'un air sérieux et presque chagrin, qu'on ne rencontre pas *tous les jours*), il se plaisait à citer ce qu'il appelait aussi le *bonheur* d'un de ses confrères, dont le génie inventif et original l'avait fortement frappé. Nous allons même nous hasarder à citer de lui un propos à ce sujet qui peint fidèlement sa manière naïve de s'exprimer, quand il était vivement pénétré: « Voyez, dit-il un jour, ce dia... de ***, « avec son Application de l'analyse à la génération des surfaces, il « sera immortel, il sera immortel !.... »

Sa candeur était égale à sa pénétration, et le contraste habituel de ces deux grandes qualités de son esprit et de son caractère, donnait à son commerce un haut degré d'intérêt et de piquant. Comme il n'avait que des idées parfaitement nettes, il voulait toujours que leur expression fût une peinture fidèle de ses conceptions. Delà, quand il avait commencé quelque phrase qu'il désespérait d'achever assez clairement, ces interruptions originales, suivies pour l'ordinaire de son mot favori, *je ne sais pas, je ne sais pas....* Sans chercher à la retourner autrement, il la laisait là brusquement. Souvent aussi ces silences imprévus étaient causés par une idée nouvelle qui venait à la traverse, et qui absorbait rapidement son *intelligence rechercheuse*. (Expression bien vraie de *Hérault de Séchelles*, en parlant de Lagrange.) Qui ne l'a pas vu s'interrompre ainsi tout-à-coup aux leçons qu'il donnait à l'École Polytechnique, paraître quelquefois embarrassé comme un commençant, quitter le tableau et venir s'asseoir en face de l'auditoire, tandis que maîtres et élèves, confondus sur les bans, attendaient dans un respectueux silence qu'il eût ramené sa pensée des espaces qu'elle était allée parcourir !

. . . .

Signé, L. B. M. D. G.

M. Robiquet (Pierre) a été nommé à la place de répétiteur de chimie, vacante par la mort de M. Cluzel.

M. Rouby, professeur suppléant au lycée Charlemagne, a été nommé adjoint aux répétiteurs d'analyse à l'Ecole Polytechnique, pour l'année scholaire 1813 — 1814.

Promotions d'anciens élèves de l'Ecole Polytechnique à des grades supérieurs. (Voyez pages 297 et 370 du 2e. volume.)

ARTILLERIE.

Général de brigade.

M. le chevalier Berge. (Décret du 26 mai 1813.)

Majors.

MM. Brechtel (Henry-Ignace).
D'Hautpoul (Marie-Constant-Fidèle-Henry-Amand).
Aubert (François).
Capelle (Antoine-Laurent).
Renaud (Jean-Baptiste-Lupicin).
Pache (Jean).
Lefrançais (Frédéric-Louis).
St.-Cyr (Aimé-Prosper).
Reguis (François-Etienne).
Abeille (Joseph-Ildephonse-Clément).

Chefs de bataillon.

MM. Forceville (Louis).
Evain (Auguste-Joseph).
Mocquard (Bonaventure)......
Lavillette (Claude)..........
Leclerc (Marie-Joseph)......
Durbach (Joseph-Léopold).....
Eggerlé (Jean-Jacques-Adam-Hyacinthe-Gabriel)........
Dechambray (Georges)........ } *Garde impériale.*
Bitsch (Jean-Augustin).......
Béranger (Amable-Alexandre)....
Demetz (Victor-Sylvestre).....
Hortet (François-Blaise-Thomas)..
Lasnon (Félix-Aimé).........
Henraux (Jean-Baptiste-Xavier)...

MM. Gourgaud (Gaspard), 1er. *officier d'ordonnance.*
Pion (Claude-Nicolas).
Foulquier (Jean-Baptiste-Thérèse).
Thouvenel (Louis).
Guerrier (Jean-Baptiste-Pierre-Alexandre-François).
Dumas-Culture (Joseph-Charles) . . . } *Garde impériale.*
Bouteiller (Charles-François-Romaric). }
Le Noury (Alexandre-Jean-Marie). . . }
Pron (Pierre-Joseph).
Limozin-St.-Michel (Louis-Emmanuel). *Garde impériale.*
Alphand (François-Charles-Marie).
Nottret (Louis).
Chandon (Antoine-Victor-Barthelemy).
Gosse (Casimir).
Gosset (Charles-Antoine).
Moret (Jean-Marie-François).
Delesvaux (Antoine).
Prévost (Jean-Michel-Marie).
Puthaux (Henry-François).
Dubocq (Jean-Thomas).
Foucault (Camille-Louis).
Chenin (Jean-Baptiste). . . . . . . } *Garde impériale.*
Huet (Jean-Guillaume). . . . . . . }
Hulot (Jean-Gaspard).
Ducros (Joseph).
Etchegoyen (Martin).
Rey (Edouard-Eléonore-Guillaume).
Gorsse (Joseph-Augustin).
Joffre (Pierre-Jean-Joseph). . . . . *Garde impériale.*
Monval (Charles-Antoine-Auguste).
Dauty (Jean-Pierre).

Nota. Tous les officiers qui appartiennent à la garde impériale, ont le grade pour lequel ils sont portés dans cette liste, et restent dans les fonctions du grade inférieur tant qu'ils servent dans la garde.

PONTS ET CHAUSSÉES.

Ingénieur en chef.

M. Tourneux (Jean-François).

GÉNIE MARITIME.

Sous-ingénieur, chef de bataillon.

M. Masquelez (François-Augustin-Joseph).

GÉNIE MILITAIRE.

Colonels.

M. Bernard (aide-de-champ de S. M.).
MM. Treussart.
Constantin.

Majors.

MM. Christin.
Bodson.
Thiebault.
Finot.
MM. Thuillier.
Marion.
Paulin.

Chefs de bataillon.

MM. Parnajon.
Errard.
Vallantin.
Dupau.
De la Vigne.
Audoy.
Cournault.
Maillard.
Hersart.
MM. Vivier.
Huz.
Dumoncel.
Olry.
Lemut.
Berthois.
Atthalin.
Riolay.
Plazanet.

CONSEIL DE PERFECTIONNEMENT.

La quatorzième session du Conseil de perfectionnement a été ouverte le 6 novembre 1813, et terminée le........

LISTE DES MEMBRES DU CONSEIL.

Gouverneur de l'Ecole Polytechnique, président.

S. Exc. M. le comte de Cessac.

Examinateurs pour l'admission dans les services publics, membres désignés par la loi.

MM. Legendre, Lacroix, Ferry, Dulong.

Membres de l'Institut national, pris, selon la loi, dans la classe des sciences de l'Institut.

MM. Le comte Berthollet, le comte Laplace, Carnot.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la guerre.

MM. Le chevalier Allent, officier supérieur du génie; Cotty, officier supérieur d'artillerie; Moynet, chef d'escadron au corps des ingénieurs géographes; Champy, administrateur général des poudres et salpêtres.

Désignés par S. Exc. le Ministre de la marine.

MM. Le comte Sugny (1), inspecteur général d'artillerie de la marine; le baron Sané, inspecteur général du génie maritime.

Désignés par S. Exc. le Ministre l'intérieur.

MM. Prony, inspecteur général des ponts et chaussées; Lelièvre, inspecteur général des mines.

Directeur des études de l'Ecole Polytechnique.

M. Durivau.

Commissaires choisis par le conseil d'instruction parmi ses membres.

MM. Le comte Monge; le baron Guyton-Morveau, Andrieux, Thenard.

Secrétaire du conseil.

M. Marielle, quartier-maître trésorier de l'Ecole Polytechnique.

CONCOURS DE 1813.

EXAMINATEURS POUR L'ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

Analyse; Mécanique........	MM. Legendre, Lacroix, *examinateurs permanens.*
Géométrie descriptive; Analyse appliquée à la géométrie; Physique.	M. Ferry.
Chimie........................	M. Dulong.

(1) Remplacé par M. le général Thirion, adjoint à l'inspecteur de l'artillerie de la marine.

EXAMINATEURS POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Paris.	M. Francoeur.
Tournée du Sud-Ouest	M. Reynaud.
Tournée du Nord-Est.	M. Dinet.
Tournée du Sud-Est	M. Labey.

Les examens ont été ouverts le 1er. août, et les cours pour la deuxième division formée par la nouvelle promotion, ont commencé le 2 novembre.

Le Jury d'admission a prononcé, le 27 septembre 1813, sur les candidats qui se sont présentés au concours de cette année.

460 candidats ont été examinés,

SAVOIR:

A Paris.	229	460.
Dans les départemens.	231	

Sur ce nombre 356 ont été jugés admissibles,

SAVOIR:

De l'examen de Paris.	174	356.
Des départemens.	182	

13 candidats ont été rejetés du concours, et 5 reculés dans l'ordre d'admission, par défaut d'exercice dans l'art du dessin.

6 candidats ont de même été rejetés du concours par défaut d'instruction suffisante, en littérature latine ou française.

Le nombre des candidats admis à l'Ecole, par suite de la décision du Jury, a été de 209,

SAVOIR:

De Paris.	97	209.
Des départemens.	112	

Nombre des élèves admis à l'Ecole depuis son établissement,

SAVOIR:

De Paris.	1449	3026.
Des départemens.	1577	

Nombre des candidats examinés depuis l'établissement de l'Ecole,

SAVOIR:

De Paris.	3146	7015.
Des départemens.	3869	

LISTE,

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE,

Des Candidats admis à l'École Polytechnique, au nombre de 209, par suite de la décision du Jury, du 27 septembre 1813.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Adenot.	Philibert-Benoît.	Rosey.	Saône-et-Loire.
Anfray.	Aristide-Elie.	Rennes.	Ille-et-Vilaine.
Aragon.	Louis.	Narbonne.	Aude.
Armellini.	Pierre.	Rome.	Rome.
Assolant.	Mutius-Scœvola.	Aubusson.	Creuse.
Avogadro de Colobian.	Emmanuel-César-Etienne-Marie.	Ivrée.	Doire.
Bahuaud.	Pierre-Gabriel.	Toulouse.	Haute-Garonne.
Baillot.	Théodore.	Ligny.	Meuse.
Barbier.	Jean-Baptiste-Théodore.	Brest.	Finistère.
Bardin.	Libre.	Montargis.	Loiret.
Barré de Saint-Venant.	Adhémar-Jean-Claude.	Fortoiseau.	Seine-et-Marne.
Barrier.	André-Eugène.	Abbeville.	Somme.
Batbedat.	Léon.	Paris.	Seine.
Bidault.	Jean-Jacques.	Romorantin.	Loir-et-Cher.
Bobillier.	Marie-André.	Lons-le-Saulnier.	Jura.
Bonneton.	Achille.	Chantelle.	Allier.
Bonnin.	Jean.	Lyon.	Rhône.
Bornet.	François-Théophile.	Guérigny.	Nièvre.
Boscher.	Charles-Alexandre.	Thury-Harcourt.	Calvados.
Bouchot Plainchant.	Juste.	Orléans.	Loiret.
Bouglé.	Francois-Auguste.	Tours.	Indre-et-Loire.
Bouillon.	Gédéon-Edouard.	Paris.	Seine.
Bouldouyre.	Barthelemy.	Coutras.	Gironde.
Bouteiller.	Modeste-Frédéric.	Rouen.	Seine-Inférieure.
Boutillier.	Sulpice-Narcisse.	Beauvais.	Oise.
Bruslé.	Auguste-Prosper.	Paris.	Seine.
Bussy.	Antoine-Alex.-Brutus.	Marseille.	Bouc.-du-Rhône.
Camus.	Charles-Alex.-Bernard.	Metz.	Moselle.
Capella.	Etienne-Germain.	Mas Stes.-Puelles.	Aude.
Carles.	Emile.	Paris.	Seine.

NOMS.	PRENOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Caron.	Pierre-François.	Soissons.	Aisne.
Carré de Candé.	François-Jules.	La Rochelle.	Char.-Inférieure.
Castaignède.	Jean.	Pissos.	Landes.
Castillon.	Louis-Auguste.	Metz.	Moselle.
Cathol Dudeffan.	Amable-Guill.-Joseph.	Pradelles.	Haute-Loire.
Chambige.	Benoît-Annet.	Billom.	Puy-de-Dôme.
Chancel.	Jean-Joseph-Augustin.	Briançon.	Hautes-Alpes.
Chaper.	Pierre-Achille-Marie.	Paris.	Seine.
Chauchet.	Godefroy-Junius.	Bouillon.	Ardennes.
Chavelet.	Claude-Étienne.	Germigney.	Jura.
Chicoyneau Lavallette.	Absynthe.	Saint-Cyr-sur-Loire.	Indre-et-Loire.
Chopinet d'Leindre.	Antoine-Achille.	Paris.	Seine.
Collet.	Marie-Claude-Julien.	Paris.	Seine.
Constantin.	Achille.	Blois.	Loir-et-Cher.
Courtial.	Mauriee.	Paris.	Seine.
Coustant Dyanville.	Charles-César.	Senlis.	Oise.
Crozals.	Paulin.	Montpellier.	Hérault.
Dalmas.	Francois.	St.-Amand-Roche-Savine.	Puy-de-Dôme.
Dandelin.	Germinal.	Le Bourget.	Seine.
Davin.	Victor-Félix.	Paris.	Seine.
Debacq.	Alcindor.	Paris.	Seine.
Dechamp.	Jacques-Emile-Benoît.	Nevers.	Nièvre.
Delafoye.	Eugène-Charles-Franç.	Wetzlar en Wétéravie.	....
Delbourg.	Jean-Baptiste.	Monflanquin.	Lot-et-Garonne.
Demallet de Lavédrine.	Jean-Henri.	Riom.	Puy-de-Dôme.
Desforges.	Auguste.	Amiens.	Somme.
Dessin.	Louis-Antoine.	Calais.	Pas-de Calais.
Destremau.	Jacques-Emile.	Houga.	Gers.
D'Huez.	Alexandre-Pierre.	Paris.	Seine.
Donop.	Claude-Frédéric.	Nancy.	Meurthe.
Drut.	André.	Douay.	Nord.
Dubois.	Charles-Gustave.	Paris.	Seine.
Dubois.	Edouard.	Paris.	Seine.
Dumon.	Antoine-Emile.	Agen.	Lot-et-Garonne.
Dundas.	Charles.	Paris.	Seine.
Du Puits.	Marie-François.	Vienne.	Isère.
Duval Dumesnil.	Alexan.-Pierre-Martial.	Paris.	Seine.
Duvernoy.	Fructidor.	Paris.	Seine.
Enfantin.	Barthélemy-Prosper.	Paris.	Seine.
Favre Bulle.	Ami.	Besançon.	Doubs.
Féline.	Adrien-Benjamin.	Paris.	Seine.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Ferréol.	Joseph-Charles.	Nismes.	Gard.
Ferrière.	François-Hyacinthe.	Flavigny.	Meurthe.
Folliart.	Georges-Louis.	Reims.	Marne.
Fournier.	Marcellin.	Paris.	Seine.
Fraix.	Jean-Baptiste.	Verrens.	Mont-Blanc.
François.	Jean-Baptiste-Etienne.	Briey.	Moselle.
Frégier.	Paul-Félix-Bienvenu.	Aix.	Bouc.-du-Rhône.
Frossard deSaugy.	Jean-Louis.	Bursin et Gilly, canton de Vaud, en Suisse.	....
Gaillardon.	Urbain.	Aubeterre.	Charente.
Gamot.	Charles-Médéric.	Provins.	Seine-et-Marne.
Gand.	Pierre-Henri.	Reims.	Marne.
Garcerie.	Nicolas-Jacques-Louis César.	Mirande.	Gers.
Garçon Rivière.	Charles-Philippe.	Paris.	Seine.
Gardeur Lebrun.	Nicolas-Antoine.	Metz.	Moselle.
Garnot.	Auguste-Théodore.	Brest.	Finistère.
Gentil.	Aimé-Prosper.	Metz.	Moselle.
Gérardy.	Louis-François.	Paris.	Seine.
Giguet.	Pierre.	Véron.	Yonne.
Gineste.	Jean-Philippe.	Puilaurens.	Tarn.
Giraud.	Charles-Henri.	Grenoble.	Isère.
Gisclard.	Jean-Jacques.	Saint-Juéry.	Tarn.
Gitton de la Ribellerie.	Etienne.	Melun.	Seine-et-Marne.
Gonsse.	Paul-Emile.	Blendecques.	Pas-de-Calais.
Gonyn de Lurieu.	François-Benoît.	Feurs.	Loire.
Gouazé.	Jean-François.	Saint-Girons.	Arriège.
Gravier.	Bertrand.	Bergerac.	Dordogne.
Grillet Serry.	Achille-Jacques.	Auxerre.	Yonne.
Guérard.	Jacques-Charles.	Paris.	Seine.
Guibert.	Marie-Pierre-Adolphe.	Toulouse.	Haute-Garonne.
Guimet.	Jean-Baptiste.	Voiron.	Isère.
Guyonneau Pambour.	François-Montain.	La Fère.	Aisne.
Guyot Duclos.	Timoléon.	Avesnes.	Nord.
Hedde.	Félix-Orme.	Calais.	Pas-de-Calais.
Hélie.	Félix.	Nantes.	Loire-Inférieure.
Henry de Faveaux.	Alex.-Joseph Ghislain.	Mettet.	Sambre-et-Meuse.
Houeau.	René.	Château-du-Loir.	Sarthe.
Joly.	Jean-Gabriel.	Thiaucourt.	Meurthe.
Joubert.	Joseph-Théodore.	Noirmoutiers.	Vendée.
Jousserant.	Antoine-Arthur.	Rochefort.	Char.-Inférieure.
Juge.	Jean-Baptiste.	Riom.	Puy-de-Dôme.
Keguelin de Rozieres.	Auguste.	Strasbourg.	Bas-Rhin.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Lablancherie.	Jean-Marcel.	Bordeaux.	Gironde.
Labrosse.	Fraternité.	Paris.	Seine.
Lainé.	Joachim.	Les Andelys.	Eure.
Le Blanc.	Gaspard.	Eclaron.	Haute-Marne.
Le Breton.	Georges-Antoine.	Cognin.	Mont-Blanc.
Le Camus.	Bon.	Paris.	Seine.
Le Chevalier.	Victor Arsène.	Neubourg.	Eure.
Leclerc.	Pierre.	Paris.	Seine.
Le Compte.	Louis-Nicolas.	Tours.	Indre-et-Loire.
Le Comte.	Jean.	La Boussac.	Ille-et-Vilaine.
Lefrançois.	Henri.	Chinon.	Indre-et-Loire.
Léger.	Emile.	Lagrange-aux-Bois.	Marne.
Lemaistre.	Louis René.	Villebourg.	Indre-et-Loire.
Le Marchand.	Désiré-Germinal.	Pont-Audemer.	Eure.
Lenfant.	Achille-Héliotrope.	Fontainebleau.	Seine-et-Marne.
Le Paige Dorsenne.	Louis-Nicolas-Edme.	Ardres.	Pas-de-Calais.
Lionnet.	Antoine-Louis.	Paris.	Seine.
Loizillon.	Dominique.	Metz.	Moselle.
Mabru.	Joseph-Achille-Paul-Emile.	Clermont.	Puy-de-Dôme.
Mahot.	Fréd.-Jean-Chrisostome.	Ploermel.	Morbihan.
Maillefert.	Eugène.	Tonnerre.	Yonne.
Mainot.	Louis-Bruno.	Paris.	Seine.
Maitrot.	Simon.	Recey-sur-Ource.	Côte-d'Or.
Malpassuti.	Charles-Blaise-Victor-Raymond-Gérard-Louis.	Carbonara.	Gênes.
Marceschean.	Armand-Jean-B.-Louis.	Boisset-St.-Priest.	Loire.
Marchand.	Charles-François.	Paris.	Seine.
Marion.	Jacques-Charles.	Paris.	Seine.
Masitz.	Jean-Jacques.	La Haye.	Bouc.-de-la-Meuse.
Mathiot.	Nicolas-Joseph-Alexis.	Thiaucourt.	Meurthe.
Menjaud.	Camille.	Paris.	Seine.
Mercanton.	Jean-Samuel.	Vevey en Suisse.	....
Merens.	Meinard.	Hoorn	Zuiderzée.
Mie.	Justin.	Périgueux.	Dordogne.
Minangoy.	Henri-Georg.-Philibert.	Colmar.	Haut Rhin.
Minard.	Pierre-Alex.-Stanislas.	Roye.	Somme.
Monnier.	Paul.	Poligny.	Jura.
Moreau.	Jean.	Chabrac.	Charente.
Moreau.	Emile.	Louhans.	Saône-et-Loire.
Morin.	Arthur-Jules.	Paris.	Seine.
Morlet.	Charles-Gabriel.	Paris.	Seine.
Moultson.	Louis-Charles-Auguste.	Dunkerque.	Nord.
Mutel.	Pierre-Auguste-Victor.	Arras.	Pas-de-Calais.
Nicolas de Meissas.	Alexandre-André.	Serres.	Hautes-Alpes.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Noizet Saint Paul.	Henri-Louis-Auguste.	Barly.	Pas-de-Calais.
Nourtier.	Charles.	Coulombs.	Eure-et-Loire.
Pargade.	Philibert-Adolphe.	Garlin.	Basses-Pyrénées.
Paris.	Antoine.	Paris.	Seine.
Pavan.	François-Joseph-Marie.	Rennes.	Ille-et-Vilaine.
Payn.	Romain-Hippolyte.	Troyes.	Aube.
Pédroni.	Victor-Amédée.	Bordeaux.	Gironde.
Pelletier.	Armand-Joseph.	Voigny.	Aube.
Percy.	Casimir.	Montaigu.	Tarn-et-Garonne.
Pernet.	François-Simon.	Gergy.	Saône-et-Loire.
Peyré.	Jean-Marie-Marcelin.	Réalmont.	Tarn.
Picot.	Adrien.	Châlons.	Marne.
Pierrugues.	Jean-François.	Callas.	Var.
Piet.	Mathieu-Glaucus.	Paris.	Seine.
Piohert.	Guillaume.	La Guillotière, près Lyon.	Rhône.
Pirain.	Emile-Félix.	Gisors.	Eure.
Pommé.	Jean-Jacques.	Alicante en Espagne.	....
Pons.	Joseph.	Monclar.	Lot-et-Garonne.
Pravaz.	Charles-Gabriel.	Le Pont-de-Beauvoisin.	Isère.
Prieur de Lacomble.	Eugène.	Nemours.	Seine-et-Marne.
Proust.	Théodore.	Niort.	Deux-Sèvres.
Prudhon.	Eudamidas.	Paris.	Seine.
Puillon Boblaye.	Théodore.	Napoléonville.	Morbihan.
Rabusson.	François-Némorin.	Rouen.	Seine-Inférieure.
Raffard.	François.	Serrières.	Ardèche.
Raspieller.	Joseph-Ignace.	Porentruy.	Haut-Rhin.
Raymond.	Charles-Victor-Emile.	Charly.	Rhône.
Récicourt.	Charles.	Montreuil-sur-Mer.	Pas-de-Calais.
Rérolle.	Jacques-François.	Decize.	Nièvre.
Rigaudie Saint-Marc.	Joseph.	Montaut.	Lot-et-Garonne.
Ripa.	Louis-Ch.-Félix-Benoît.	Romano.	Doire.
Ripert.	Pierre-Louis.	Chambéry.	Mont-Blanc.
Rogelin.	Pierre-Jacques.	Paris.	Seine.
Rogier.	Pierre-Henri.	Paris.	Seine.
Rost.	Pierre-Adolphe.	Condezaigues.	Lot-et-Garonne.
Roubaud.	Pierre-Jos.-Noé-Mélite.	Gap.	Hautes-Alpes.
Roussel.	Louis-Marie-Joseph.	Pont-St.-Esprit.	Gard.
Roussigné.	Charles-Michel.	Troyes.	Aube.
Sabde.	Jean-Jacques-Maurice.	Milhaud.	Aveyron.
Salomon.	Joseph-Nicolas-Louis.	Verdun.	Meuse.
Sergent.	Théodore.	Paris.	Seine.
Talabot.	Joseph-Léon.	Limoges.	Haute-Vienne.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Thirion.	Amand-Joachim-Ambroise.	Paris.	Seine.
Thurninger.	Alexis-Georges-Benjamin-Frédéric.	Paris.	Seine.
Tinseau.	Charles.	Metz.	Moselle.
Tribalet.	Ange-Félix.	Coucy-le-Château.	Aisne.
Tribert.	Florimont.	La Ferté-Milon.	Aisne.
Trippier Lagrange.	Aimé-Gilles.	Mayenne.	Mayenne.
Trouillet.	Louis-Edme.	Montargis.	Loiret.
Varin.	Jean-Charles.	Mondidier.	Somme.
Vassas.	Jean-Claude-Charles.	Montpellier.	Hérault.
Vestier.	Archimède.	Paris.	Seine.
Vigier.	Marc-Antoine.	Paris.	Seine.
Villeneuve.	Decius.	Cloué.	Vienne.

ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

Listes, par ordre de mérite, des élèves admis dans les services publics, pendant l'année 1813.

ARTILLERIE DE TERRE.

En avril 1813.

MM.
Protche.
Gauchet.
Migout.
Ginet.
Perrodon.
Patau.
Rossi.
Hennebert.
Cléry.
Donnat.
Girard (Aimé-Auguste).

MM.
Stocard.
Doulcet Pontécoulant.
Brillard.
Sarrieu.
Empaytaz.
Giraud (Marc-Sébastien-Xavier).
Lanty.
Fauchon.
Gloux.
Hermann.
Cartier.

MM.
Blanchard.
Delon.
Alauze.
Corbin.
Lamarque.
Munier.
Lelasseux-Lafosse.
Tattet.
Lemit.
Gillet.
Balladier.
Provigny.
Lafitte.
Fabre (Albin-Camille-Franç.).

MM.
Pinel (Louis-Pierre).
Ledenmat Kervern (E.-M.-H.).
Houdaille.
Magniez.
Charles *dit* Artaud.
Pinac.
Lacave Laplagne.
Sers.
Arago.
Terson.
Fromentin.
Lherbette.
Ditch.
Auvé.

TOTAL 50

En octobre 1813.

ANCIENS ÉLÈVES DE LA PREMIÈRE DIVISION.

MM.
Sobrero.
Poedevin.
Tardy.
Mazé.
Pottier (Colza).
Lair.
Prat (J.-A.-F.).
Lefaivre (A.-F.).
Serton du Plonget.
Guiraudet Saint-Amé.
Rangouse.
Girault (J.-J.)
Contencin.

MM.
Gille *dit* Dumarchais.
Lecoq.
Hacquin.
Berthault.
Gaudin.
Severac.
Delespée.
Soubeiran.
Delorme.
Faure de Fournoux.
Boscary.
Vérité.
Bing.

TOTAL 26

ÉLÈVES NOUVELLEMENT ADMIS A LA PREMIÈRE DIVISION.

MM.
Ruel.
Marque Doncour.
Sirurguet.
Treins.
Parchappe.

MM.
Gay.
Marminia.
Duport.
Pacotte.
Babinet.

MM.
Lacoste.
Coullet.
Brunet.
Puech.
Ronin.
François.
Roux.
Poullain de Saint-Foix.
Tirel Martinière.
Rubin de la Missonnais.
Chère.
Dalican.
Mareschal.
Gaillard.
Escanyé.
Ranfrai-Bajonnière.
Reboul.

MM.
Silvestre.
Molinos.
Santeul.
Gambini.
Coste.
Pin.
Michelin.
Couty.
Renault.
Canton.
Jeannin.
Doucet.
Motte.
Sain-Mannevieux.
Chapotin.
Ménard.
Laroyenne.

TOTAL. 44 (1)

GÉNIE MILITAIRE.

MM.
Simon.
Delesme.
Salenave.
Deniéport.
Delbet.
Fuchsamberg.
Lorieux.
Demonthiers de Boisroger.
Delannay.
Bédigie.
Nisot.
Goupilleau.
Meilheurat.
Robert-Dugardier.

MM.
Lelievre.
Feuardant-d'Ecalleville.
Botto.
Reguis.
Ruinet.
Oblet.
Frémont.
Fauquier.
Groult.
Loppé.
Dumesniladelée.
Gombault.
Narjot.
Tilly-Kerveno.

(1) Les élèves dont les noms suivent, et qui ont été portés comme démissionnaires dans le N°. précédent, page 491, sont entrés dans le service de l'artillerie, en qualité d'élèves sous-lieutenans.

MM. Ajasson de Grandsagne.
Arnoux.
Barthes.

MM. Buisson.
Cornisset.
Cramouzand.

MM. Domergue.
Paulin.

MM.
Marchais.
Challaye.
Boutault.
Castaignet.
Guéry.
Vandelin-Daugerans.
Vouzeau.
Ducros.

MM.
Lebouedec.
Amphoux.
Dautheville.
Grivet.
Devienne.
Dosque.
Charon.
Bizot.

TOTAL. 44

INGÉNIEURS GÉOGRAPHES.

ANCIENS ÉLÈVES DE LA PREMIÈRE DIVISION.

MM.
Peytier.
Anfossi.
Mallat.
Belland.
Duhousset.
Largeteau.

MM.
Puillon-Beblaye.
Gougeon.
Lecamus.
Schneider.
Gambier.

TOTAL. 11

ÉLÈVES NOUVELLEMENT ADMIS A LA PREMIÈRE DIVISION.

MM.
Poudra.
Faulte-du-Puyparlier.
Stein.
Salneuve.
Révérony.

MM.
Martner.
Ferrandin-Gazan.
Tellier.
Noël (N.-J.).
Gavard.

TOTAL. 10

PONTS ET CHAUSSÉES.

MM.
Mutrecy *dit* Maréchal.
Vergès.
Gimmig.

MM.
Goupil-Prefeln.
Vimal-Teyras.

TOTAL. . . . . 5.

MINES.

MM.
Petit-Dufrénoy.
Thibaud.

M.
Labarbe.

Total 3

CONSTRUCTION DES VAISSEAUX.

MM.
Garnier.
Campaignac.
Hébert.
Rachia.
Zeni.

MM.
Gernaert.
Vincent.
Lefebvre de Sallay.
Fauveau.

Total. 9

NOMMÉS SOUS-LIEUTENANS DANS LA LIGNE.

M. Reynaud-Villeverd.

M. Vidé.

Total. 2

DÉMISSIONNAIRES.

MM.
Chevalier.
Bouzane-Desmazery.
Grangeneuve.
Le Mauff.

MM.
Malaret.
Pinot.
Puissant.
Terrasson.

Total. 8

MORT.

M. Renouard de Saint-Loup.

Total. 1

ETAT de situation des élèves de l'Ecole Polytechnique, à l'époque du 1er. janvier 1814.

L'Ecole était composée, au 1er. janvier 1813, de... 340 Elèves.

Elle a perdu pendant l'année 1813,

SAVOIR:

Mort	1	9	213
Démissionnaires	8		
Admis dans les services publics.			
Artillerie de terre (1)	120	204	
Génie militaire	44		
Ingénieurs géographes	21		
Ponts et chaussées	5		
Mines	3		
Construction des vaisseaux	9		
Nommés sous-lieutenans dans la ligne	2		

Il restait 127

Elèves admis à l'Ecole, à dater du 1er. novembre 1813 . 209

Total des élèves composant l'Ecole Polytechnique, au 1er. janvier 1814 . . . . 336 Elèves.

SAVOIR:

Première division	123	336
Deuxième division	213	

---

(1) Non compris huit des Elèves désignés comme démissionnaires, page 491, 2e. vol. de la Correspondance, et qui ont été admis dans le service de l'artillerie en qualité d'élèves sous-lieutenans. On ne doit compter comme démissionnaires que MM. Bryon, Gobard, Lindenmeyer, Misussens.

CORRESPONDANCE
SUR
L'ÉCOLE IMPÉRIALE POLYTECHNIQUE,

Redigée par M. Hachette.

IIIe. Vol., Ier. Cahier.

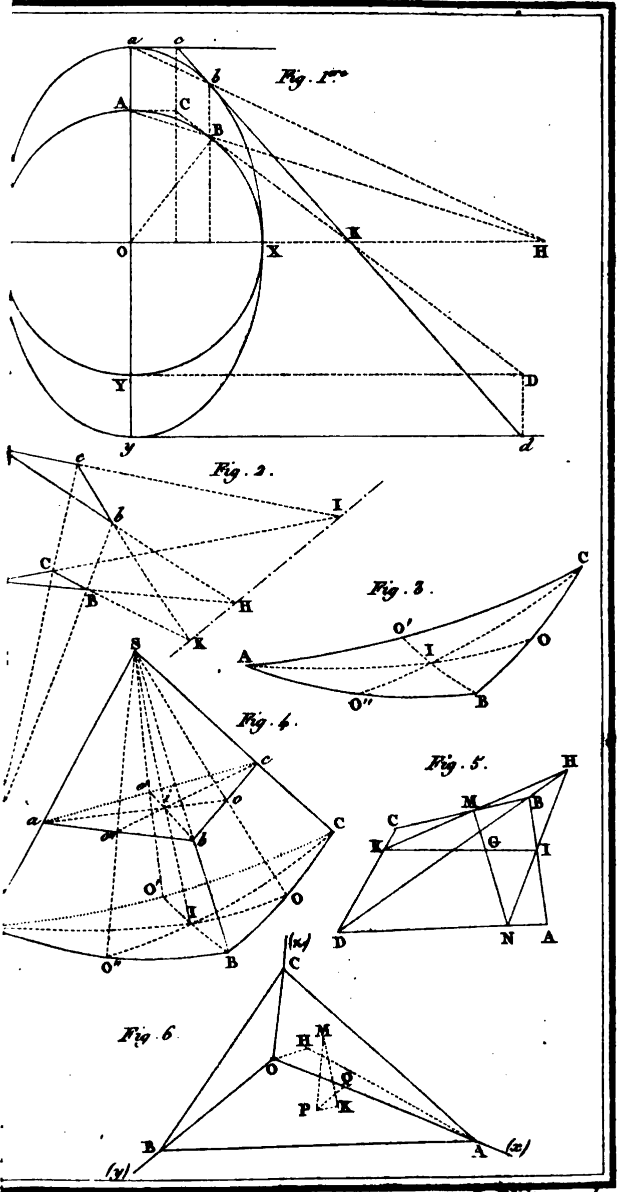
Pages 1 — 110. 6 planches. Janvier 1814.

TABLE DES MATIÈRES
Contenues dans ce Cahier.

§. Ier. Sciences mathématiques.

Fin de la Table.

IMPRIMERIE DE H. PERRONNEAU.


Fig. 1re
a
c
b
A
C
B
O
X
K
H
Y
D
y
d
Fig. 2.
e
b
I
C
B
H
K
Fig. 3.
C
O'
I
O
A
O''
B
S
Fig. 4.
c
a
b
C
O'
I
O
O''
B
Fig. 5.
H
M
B
C
K
G
I
D
N
A
(z)
C
Fig. 6
M
H
O
Q
P
K
B
A
(x)
(y)

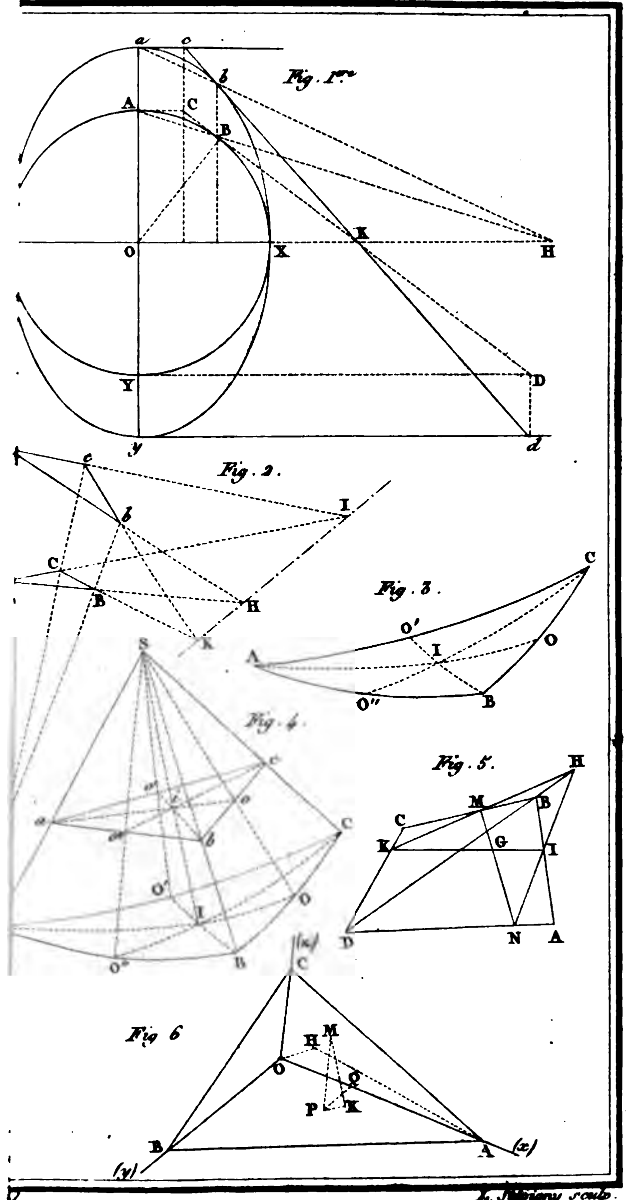
§. II. Sciences physiques.

§. III. Annonce d'ouvrages.

§. IV. Personnel.

Fin de la Table.

IMPRIMERIE DE H. PERRONNEAU.



L. Sibigny sculp.

.b.

Fig. 3.

Fig. a.

Fig. b'.

L. Sixdeniers sculp.

...a

Fig. b.

T K C N M V Y Z φ (Q) C' (P) O X

C N K C' (P) O

(Q)

...1ère.

Fig. 2.

d t' S s B a a' A (P)

d s B A

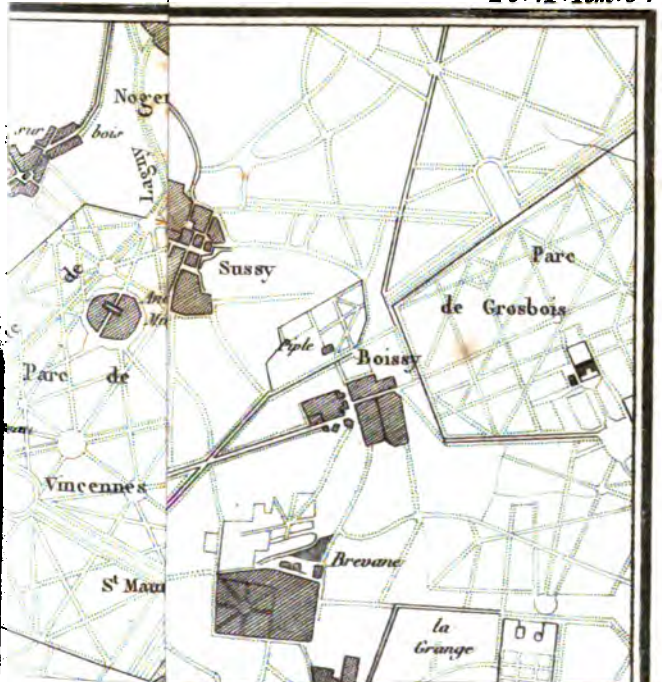
Fig. 3.

ω' ω A B l m L M

(Q) S ω a B a'

Fig. 5.

(Q) d S k S' ω a B a'


Noger
sur
bois
Lagny
Sussy
de
Parc de Grosbois
Piple
Boissy
Parc de
Vincennes
Brevane
St Maur
la Grange

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

IIIe. Volume.

N°. II. *Mai* 1815.

§. I. ANALYSE.

Des principes fondamentaux (*) *et des règles générales du calcul différentiel.* (Extrait des leçons d'Analyse de M. Poinsot) (**).

I.

Dans le calcul infinitésimal, on considère les grandeurs comme formées par l'addition successive de leurs parties homogènes. On peut nommer ces parties ou différences successives, les élémens de la grandeur; et leur somme recompose la grandeur même, puisque c'est en ces élémens qu'on l'avait soi-même décomposée. Cela est manifeste.

Mais comme ces élémens ne seraient pas plus faciles à traiter que les grandeurs elles-mêmes, on prend à leur place d'autres quantités voisines qui soient faciles à évaluer par les premiers principes de la géométrie et du calcul. Si ces quantités voisines, que nous nommerons *différentielles*, s'approchent beaucoup des différences ou élémens, le résultat s'approchera beaucoup de la vérité : c'est ce

(*) Le programme adopté, il y a deux ans, pour l'enseignement de l'Ecole Polytechnique, porte qu'on exposera les principes du calcul différentiel par la considération des infiniment petits, et qu'on fera voir dans les cas plus simples, l'accord de cette méthode avec celle des limites, ou du développement en série.

(**) Cet extrait et le suivant relatif au changement de la variable indépendante, doivent être regardés comme des notes rapides qu'on a jugé à propos d'imprimer ici en faveur des Élèves.

que l'on sent d'abord en général. Mais il y a plus : si les différentielles sont tellement choisies, que leurs dernières raisons avec les élémens soient la raison d'égalité, et si le problême dont on s'occupe ne dépend précisément que de ces dernières raisons, vous pourrez en toute rigueur substituer les différentielles aux élémens véritables que vous aviez dessein de considérer, et le calcul infinitésimal, qui ne se présentait d'abord que comme une méthode d'approximation, deviendra un calcul aussi rigoureux que l'algèbre.

II.

Nous devons donc poser d'abord ce premier principe du calcul infinitésimal, et que l'on peut nommer le principe de l'égalité des dernières raisons : c'est *qu'on ne doit jamais prendre, au lieu des différences ou elémens des grandeurs, que des quantités dont la dernière raison avec ces élément soit la raison d'égalité*.

Ainsi, on se conforme au principe, quand on prend dans le segment d'une aire plane, au lieu du trapèze curviligne qui est l'élément lui-même, le rectangle inscrit ou circonscrit; parce qu'il est manifeste que la dernière raison du rectangle au trapèze est la raison d'égalité.

Mais quoique les deux figures se confondent à la fin, ce serait violer le principe, que de prendre le petit côté du rectangle pour le petit côté adjacent du trapèze; parce que leur dernière raison n'étant pas l'unité, vous seriez conduit, par exemple, à cette erreur grossière, que la longueur de la courbe est égale à celle de l'abcisse qui lui correspond. Mais vous pourrez très-bien prendre pour le petit côté du trapèze ou pour la différentielle de l'arc, la corde qui le soustend; parce que la dernière raison de l'arc à la corde est la raison d'égalité.

Vous voyez de quelle importance est ce premier principe fondamental, et avec quel soin vous devez l'observer, puisque des choses qui paraissent se confondre dans l'infini, ne peuvent néanmoins être prises l'une pour l'autre à cette limite.

Un autre principe non moins important, est celui qu'on peut nommer le principe de l'homogénéité, et qui veut *que les différentielles, quelque petites qu'on les suppose, soient toujours de même nature que les grandeurs que l'on considère*. C'est à la vérité ce qu'on a sous-entendu dans le principe de l'égalité des dernières raisons : car on ne peut considérer le rapport de la différentielle à la différence, sans les supposer homogènes; et de son côté, la différence est une partie de la grandeur aussi homogène avec elle par hypothèse. Mais comme dans les applications de la méthode *des infinimens petits*, ce principe pourrait quelquefois nous échapper, je ne crois

pas inutile de le rappeler à votre esprit, et de vous le faire ici particulièrement remarquer.

Ainsi, la différentielle d'un solide que l'on suppose coupé en une suite de tranches par des plans parallèles équidistans, serait elle-même une tranche prismatique solide; la différentielle de cette tranche prise de la même manière, et la différentielle de cette seconde différentielle, seraient encore des solides. Et quoique les rapports du solide à la tranche, de la tranche à la colonne rhomboïdale, et de celle-ci au petit rhomboïde, puissent devenir infinis, auquel cas ces différentielles successives seraient des infiniment petits du 1er., du 2e. et du 3e. ordre; il n'en faudrait pas moins les considérer comme des solides parfaitement homogènes entre eux. Et de même, il faudra toujours regarder la différentielle d'une surface, comme une surface; et celle d'une ligne, comme une ligne.

Mais on violerait le principe de l'homogénéité, en regardant un solide comme composé d'un nombre infini de surfaces; la surface, comme composée d'une infinité de lignes; et la ligne, d'une infinité de points. Par là, on pourrait également tomber dans des erreurs grossières; et si on les évite dans la méthode des *indivisibles* de *Cavallieri*, c'est qu'on fait une supposition tacite conforme au principe précédent. Ainsi, par cette méthode, si deux triangles de même base et de même hauteur sont égaux, ce n'est point parce qu'ils sont composés d'un même nombre de lignes égales et parallèles, mais parce qu'on y peut tracer le même nombre de ces lignes égales *toutes équidistantes*; de sorte qu'on a tacitement égard à la commune largeur des lignes ou plutôt des zônes qu'on imagine dans les deux triangles que l'on considère.

III.

Tels sont les deux principes fondamentaux du calcul infinitésimal : ils renferment la définition rigoureuse de ce que l'on nomme une différentielle. *La différentielle est une partie de la différence, mais dont la dernière raison avec cette différence est l'unité*; et dans toutes les applications à la géométrie, à la mécanique et à la physique, il ne faut jamais perdre de vue que les différentielles doivent être homogènes avec les grandeurs mêmes que l'on considère, comme cela résulte évidemment de la nature des choses.

La partie du calcul infinitésimal, qui apprend à trouver ces différentielles dont la dernière raison avec les différences est la raison d'égalité, s'appelle *le calcul différentiel*. L'autre partie qui apprend à trouver la somme de ce nombre infini de différentielles, s'appelle *le calcul intégral*; c'est l'inverse du calcul différentiel; et l'objet de ces calculs est la solution de tous les problêmes qui ne dépendent que des dernières raisons.

IV.

Mais puisque, par la définition même des différentielles, le calcul ne peut être exact que dans les problêmes qui dépendent de leurs dernières raisons, et non pas de ces quantités mêmes, il semble qu'on ne devrait exprimer par aucun nom, ni marquer par aucun signe ces différentielles qui n'existent pas; mais qu'il faudrait uniquement représenter les limites de leurs rapports, ou ces dernières raisons qui nous occupent, et qui seules demeurent quand les différentielles s'évanouissent. On conserverait par là, et dans le langage, et dans les signes, la rigueur même qui est dans nos conceptions. C'est en effet ce que l'on peut facilement obtenir, comme on le voit dans le calcul des *fluxions* de Newton, et dans la théorie des *fonctions dérivées* de M. de Lagrange. Car les fluxions des quantités variables, ou les vîtesses avec lesquelles ces quantités sont supposées croître et se former à chaque instant, ne sont autre chose que les dernières raisons de leurs accroissemens à l'accroissement de la variable uniforme, dont elles sont regardées comme des fonctions; et il en est de même des *fonctions dérivées* qui sont les *fluxions successives* les unes des autres. Mais ce premier artifice qui traite en apparence les différentielles comme de véritables quantités, est aussi sûr que ces méthodes, et il est bien plus commode dans les applications à la géométrie et à la mécanique. Le calcul a au fond les mêmes principes, et dans le langage on rappele tout à la même exactitude, en nommant ces différentielles et ces élémens, *des infiniment petits*; ce qui fait souvenir qu'on ne doit regarder à la fin que les limites de leurs rapports; ou s'il s'agit de la somme des différentielles, qu'on ne doit également regarder que la *limite* vers laquelle cette somme converge à mesure que les différentielles diminuent. Car je remarque que ces sommes de différentielles ont des limites aussi bien que les rapports dont on vient de parler: si chaque différentielle diminue sans cesse, d'un autre côté leur nombre augmente, et la somme de ces quantités, dont chacune tend à s'évanouir, a pourtant une limite existante qui est la somme des élémens eux-mêmes, et qui se confond rigoureusement avec la grandeur que l'on voulait trouver.

Ainsi, l'on revient toujours d'une manière naturelle au calcul de ces infiniment petits, dont on cherche les rapports, s'il faut mesurer les affections des grandeurs qui varient par nuances insensibles, ou qu'on prend en nombre infini, s'il s'agit de mesurer ces grandeurs elles-mêmes. Cette méthode est la plus directe et la plus féconde, parce qu'elle est la plus conforme à l'idée qu'on se fait naturellement de la génération des grandeurs.

V.

Il reste donc maintenant à établir les règles du calcul infinitésimal, et d'abord celles du calcul différentiel, qui apprennent à trouver la différentielle de toute fonction d'une variable ; ce qui s'appelle *différentier*.

Ces règles générales nous sont bien connues, et elles ne laissent absolument rien à desirer, comme nous le verrons tout à l'heure. Mais auparavant, il convient d'établir un point important sur l'expression générale de la différentielle d'une fonction.

VI.

La différentielle d'une fonction quelconque y de x peut toujours être prise de la forme Xdx, X étant une fonction finie de x, et dx désignant la différentielle de la variable x. De sorte que toutes les règles du calcul différentiel en lui-même se réduisent à trouver cette fonction X, qu'on peut nommer *la fonction différentielle*.

Considerez, en effet, une quantité y qui dépende continuellement d'une autre x par une loi quelconque ; y sera ce qu'on appelle une fonction de x, et cette fonction variera d'une manière continue en même tems que x, sans quoi elle ne dépendrait pas continuellement de x, comme on le suppose, et n'en serait point une fonction.

Si donc x change et s'augmente de la différence Δx, y changera aussi et s'augmentera ou diminuera d'une certaine quantité que je nommerai Δy ; et l'on pourra considérer le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de l'accroissement de la fonction à celui de la variable. Si Δx diminue, Δy diminuera aussi, puisque ces deux quantités sont nulles en même tems, et qu'elles changent d'une manière continue. Mais quoique Δx et Δy diminuent ensemble et s'évanouissent à-la-fois ; leur rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ peut bien ne pas diminuer jusqu'à zéro, ni croître jusqu'à l'infini, mais tendre sans cesse vers une valeur finie et qui en sera la limite. On en peut voir une foule d'exemples : ainsi la fonction y étant, je suppose x^2, la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ sera $2x$; si la fonction était x^m, la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ serait mx^{m-1} ; pour $y = \sin x$, il est aisé de prouver qu'elle est $\cos x$; etc. On peut

même dire que, le rapport de deux choses homogènes ne dépendant ni de leur nature ni de leurs grandeurs absolues, par la définition même du rapport, la quantité $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ a toujours une limite; et c'est ce que la considération d'une courbe et de sa tangente dont l'existence n'est pas douteuse, fait voir d'ailleurs avec la dernière évidence.

Ainsi, y étant une fonction quelconque de x, le rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de l'accroissement de la fonction y, à l'accroissement simultanée de la variable x, a une limite qui ne dépend plus que de x, et qui est ainsi une fonction nouvelle de x. En désignant donc cette fonction par X, on aurait : limite du rapport $\frac{\Delta y}{\Delta x} = X$. Or, il est permis de supposer que la différence Δy est égale à $X \Delta x$, plus une certaine fonction de x et Δx, que je désigne par $\varphi(x, \Delta x)$; ainsi on aura $\Delta y = X \Delta x + \varphi(x, \Delta x)$. Mais d'après ce que nous avons dit, il suffirait de prendre pour différentielle, la première partie $X \Delta x$, si la dernière raison de $X \Delta x$ à la différence entière $X \Delta x + \varphi(x, \Delta x)$ était l'unité. Prenant donc le rapport, et divisant de part et d'autre par Δx, on trouve:

$$\frac{X\Delta x + \varphi(x, \Delta x)}{X \Delta x} = \frac{X + \frac{\varphi(x, \Delta x)}{\Delta x}}{K} = 1 + \frac{\varphi(x, \Delta x)}{X \Delta x}.$$

Mais la quantité $\frac{\varphi(x, \Delta x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} - X$ est nulle à la limite zéro de Δx, sans quoi X ne représenterait pas la limite de $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ contre l'hypothèse. On a donc à la limite de Δx, le rapport de la partie $X \Delta x$ à la différence $X\Delta x + \varphi(x, \Delta x)$ égal à l'unité. Donc on peut prendre $X \Delta x$ pour l'expression de la différentielle de y; et changeant la caractéristique Δ en d, pour marquer qu'on passe aux différentielles, on aura $dy = X dx$; ce qu'il fallait démontrer.

Il ne s'agit donc actuellement que de voir comment on peut trouver ce coefficient différentiel X pour toutes les fonctions; et c'est ce que nous pouvons réduire aux trois règles suivantes que j'exprimerai sur-le-champ dans ce tableau.

VII.

Règles du calcul différentiel.

Soit $y = fx$, équation où y est vu directement comme fonction de x, on aura cette *première règle:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x+\Delta x)-fx}{\Delta x}, \text{ à la limite (o) de } \Delta x, = \frac{dy}{dx}.$$

Soit $y = f(p)$ (p étant fonction de x), on aura cette *seconde règle:*

I. $$\frac{dy}{dx} = \frac{f(p+\Delta p)-fp}{\Delta x}, \text{ à la limite (o) de } \Delta x, = \frac{dy}{dp}.\frac{dp}{dx}.$$

Soit $y = f(p, q)$ (p et q étant deux fonctions de x), on aura cette *troisième règle:*

II. $$\frac{dy}{dx} = \frac{f(p+\Delta p, q+\Delta q)-f(p,q)}{\Delta x}, \text{ à la limite (o) de } \Delta x, = \frac{dy}{dp}.\frac{dp}{dx} + \frac{dy}{dq}.\frac{dy}{dq}.$$

La *première règle* n'est au fond que la définition du coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$, et ne donne évidemment aucun moyen de le découvrir, à moins qu'on ne particularise la fonction fx.

Mais la *seconde règle* fait voir que, si l'on savait différentier une fonction simple, on saurait aussi différentier une fonction de fonction. Elle se démontre facilement en mettant l'expression $\frac{f(p+\Delta p)-fp}{\Delta x}$ sous la forme $\frac{f(p+\Delta p)-fp}{\Delta p} \times \frac{\Delta p}{\Delta x}$, qui, à la limite, devient, en vertu de la première règle : $\frac{dy}{dp}.\frac{dp}{dx}$.

Ainsi, pour différentier une fonction de p, p étant une fonction de x, il faut différentier la fonction par rapport à p, considérée comme une simple variable, puis différentier p par rapport à x, et multiplier ces coefficiens différentiels.

Et si l'on avait $y = f(P)$, P étant fonction de p qui est fonction de x, on aurait d'abord : $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dP}.\frac{dP}{dx}$; mais $\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dp}.\frac{dp}{dx}$, et par conséquent $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dP}\,\frac{dP}{dp}.\frac{dp}{dx}$, et ainsi de suite.

La *troisième règle* apprend que pour différentier une fonction

de deux fonctions p et q de x, il faut différentier successivement par rapport à chacune d'elles, considérée comme seule variable, et ajouter ces fonctions différentielles.

Cette règle peut se démontrer assez facilement de cette manière :

Supposez que, dans la fonction proposée qui est $y=f(p,q)$, p croisse seule d'abord de Δp, par la substitution de $x+\Delta x$ à la place de x, dans cette fonction seule ; y deviendra $y_{,}=f(p+\Delta p,q)$: et si à présent q seule croît de même à son tour de Δq, $y_{,}$ deviendra $y_{,,}=f(p+\Delta p,\ q+\Delta q)$, et l'on aura le même résultat que si l'on avait augmenté en même tems p et q, des accroissemens simultanés Δp et Δq, dus à l'accroissement Δx de x dans les deux fonctions p et q.

Mais au lieu de prendre tout d'un coup la différence de y à $y_{,,}$, il est évident qu'on peut prendre d'abord la différence de y à $y_{,}$, prendre ensuite celle de $y_{,}$ à $y_{,,}$, et ajouter ces deux différences. On aura donc: $y_{,,}-y$ ou $\Delta y=(y_{,}-y)+(y_{,,}-y_{,})$, et divisant par Δx, $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{y_{,}-y}{\Delta x}+\frac{y_{,,}-y_{,}}{\Delta x}$, c'est-à-dire,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(p+\Delta p,q)-f(p,q)}{\Delta x}+\frac{f(p+\Delta p,q+\Delta q)-f(p+\Delta p,q)}{\Delta x};$$

or, à la limite de Δx, la première partie du second membre est, par la seconde règle, $\frac{dy}{dp}.\frac{dp}{dx}$. Pour trouver la limite de la deuxième partie $\frac{f(p+\Delta p,\ q+\Delta q)-f(p+\Delta p,\ q)}{\Delta x}$, imaginez qu'on ne fasse d'abord Δx nul que dans Δq; cette partie deviendrait, par la même règle, $\frac{dy_{,}}{dq}.\frac{dq}{dx}$; mais $\frac{dy_{,}}{dq}$ n'est autre chose que la fonction $\frac{dy}{dq}$ où l'on mettrait au lieu de p, $p+\Delta p$; donc puisque Δp s'évanouit aussi en même tems que Δx, $\frac{dy_{,}}{dq}$ à la limite de Δx se réduit à $\frac{dy}{dq}$, et l'on a enfin :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dp}.\frac{dp}{dx}+\frac{dy}{dq}.\frac{dq}{dx}.$$

On trouverait de même pour une fonction de trois fonctions

p, q, r, représentée par $y=f(p,q,r)$:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dp}.\frac{dp}{dx}+\frac{dy}{dq}.\frac{dq}{dx}+\frac{dy}{dr}.\frac{dr}{dx},$$

et ainsi de suite.

D'où l'on voit que la troisième règle s'étend à un nombre quelconque de fonctions p, q, r, etc., qui pourraient se trouver sous la fonction que l'on considère.

VIII.

Telles sont les règles générales au moyen desquelles on peut différentier une fonction quelconque d'une ou de plusieurs autres fonctions, si l'on sait différentier les fonctions simples dont elle se compose.

Ainsi tout se réduit à savoir différentier les fonctions que l'on regarde comme simples, et dont on fait usage dans l'analyse. Or, la première règle,

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(x+\Delta x)-fx}{\Delta x} \text{ (à la limite de } \Delta x \text{),}$$

ne peut rien donner sous cette forme générale, puisqu'en faisant Δx nul, l'expression $\frac{f(x+\Delta x)-fx}{\Delta x}$ devient $\frac{0}{0}$, ce qui n'apprend rien: il faudrait donc avant tout transformer cette expression de manière qu'elle ne se réduisît pas à $\frac{0}{0}$. La seule transformation générale qu'on puisse indiquer est de développer $f(x+\Delta x)$ en série, suivant les puissances de Δx; ce qui donnera :

$$f(x+\Delta x)=fx+X\Delta x+X_{,}\Delta x^2+X_{,,}\Delta x^3+\text{etc.}$$

Retranchant fx, divisant par Δx et faisant ensuite $\Delta x=0$, on aura :

$$\frac{dy}{dx}=X.$$

Ainsi la fonction différentielle $\frac{dy}{dx}$ sera le coefficient de la première puissance de Δx dans le développement de $f(x+\Delta x)$. Or, on connaît ces développemens pour les fonctions x^m, a^x,

log x, sin x, cos x, etc., et par conséquent on peut trouver par cette voie les différentielles de toutes ces fonctions simples.

IX.

Mais pour ne rien emprunter d'étranger à notre calcul, j'observe que les règles générales données plus haut suffisent, même pour différentier ces fonctions que nous regardons comme simples; de sorte que par ces règles, on saura différentier non-seulement les fonctions composées, mais encore toutes les fonctions simples, si l'on sait seulement différentier la plus simple de toutes qui est la variable, même x que l'on considère, et dont la différentielle est évidemment dx, et le coefficient $\frac{dy}{dx}$ l'unité.

Soit, par exemple, $y = x^m$ la fonction qu'il s'agit de différentier; la nature de la fonction x^m donne cette identité :

$$(ax)^m = a^m . x^m,$$

qui a lieu quelles que soient a, x et m, et qui est une définition de ce genre de fonctions qu'on appelle *puissances*.

Si donc on suppose que $y = x^m$ donne $\frac{dy}{dx} = \varphi x$, φx étant une certaine fonction inconnue qu'il s'agit de découvrir, l'identité $(ax)^m = a^m . x^m$ donnera de même (règle 2 et hypoth.) :

$$\varphi (ax)\, a = a^m \varphi x\,;$$

d'où l'on tire, en divisant de part et d'autre par $a^m x^{m-1}$:

$$\frac{\varphi x}{x^{m-1}} = \frac{\varphi (ax)}{(ax)^{m-1}}\,;$$

or, le premier membre est tout-à-fait indépendant de a : donc le second doit l'être aussi. Mais ce second membre est une fonction du produit ax : donc s'il est indépendant de a, il l'est nécessairement de x; donc $\frac{\varphi (ax)}{(ax)^{m-1}}$ est une constante K qui ne peut dépendre que de l'exposant m, et qu'on peut désigner par fm, et l'on aura :

$$\frac{\varphi x}{x^{m-1}} = K = fm, \quad \text{d'où} \quad \varphi x = fm . x^{m-1}.$$

Il ne reste plus qu'à déterminer la constante fm.

Pour cela, je considère l'identité $x^{m+n} = x^m \times x^n$, et j'ai, en différentiant et divisant ensuite par x^{m+n-1}, l'équation

$$fm + fn = f(m + n).$$

Ainsi la fonction marquée par fm est de telle nature, que la somme des fonctions est la fonction de la somme.

On aurait de même $fm + fn + fp + \text{etc.} = f(m + n + p + \text{etc.})$; et faisant m, n, p, etc. égaux entre eux et à m,

$$efm = f(me),$$

équation où m est une quantité quelconque, et e un nombre entier tel qu'on voudra.

Mais quoique e y soit entendu comme un entier, il n'en résulte pas moins que cette équation peut être considérée comme une identité en m et e, où l'on peut certainement permuter les lettres m et e, puisqu'on peut le faire dans le second membre $f(me)$, sans en changer la valeur.

Ainsi l'on a : $$efm = mfe.$$

Pour obtenir fm, il suffit donc d'avoir fe pour quelque cas particulier où cette fonction serait connue d'ailleurs : or dans le cas de $e = 1$, on a $fe = 1$; car $y = x^1$ donnerait $\frac{dy}{dx} = f(1)x^0 = f(1)$; mais d'un autre côté, par la 1re. règle, on aurait :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x + \Delta x - x)}{\Delta x} = 1 :$$

donc $f(1) = 1$, et l'équation $efm = mfe$ nous donne ainsi $fm = m$, quelque soit l'exposant m.

Ainsi l'on trouve pour la fonction $y = x^m$:

$$\frac{dy}{dx} = mx^{m-1}, \quad \text{ou} \quad dy = mx^{m-1}.dx,$$

quelle que soit m.

Si l'on craignait quelque difficulté sur la manière dont on établit l'équation $efm = mfe$, on pourrait ne considérer d'abord que le cas de m entier, où cette équation est manifeste, et l'on en tirerait comme ci-dessus $fm = m$. Après quoi faisant $me = q$, dans la précédente $efm = fme$ qui a lieu quelle que soit m, on aurait

le cas de m fractionnaire ; enfin faisant $n = -m$ dans l'équation fondamentale $fm + fn = f(m+n)$, qui a lieu quelles que soient m et n, on aurait le cas de m négatif ; et l'on démontrerait successivement le théorême dans ces trois cas sans rencontrer la moindre difficulté.

Mais je passe aux exponentielles.

Soit donc $y = a^x$ et $\frac{dy}{dx} = \varphi x$, φx étant une certaine fonction de x qu'il faut découvrir par la nature de la fonction exponentielle a^x. Cette fonction a^x est définie, par exemple, dans cette identité :

$$(a^x)^m = a^{mx},$$

qui a lieu quelle que soit m.

Différentiant par les règles précédentes, et divisant ensuite par $m(a^x)^m$, on trouve :

$$\frac{\varphi x}{a^x} = \frac{\varphi(mx)}{a^{mx}}.$$

Or, le premier membre est tout-à-fait indépendant de m : donc le second doit l'être aussi ; mais ce second membre est une fonction du produit mx : donc s'il ne dépend pas de m, il ne peut non plus dépendre de x ; et $\frac{\phi(mx)}{a^{mx}}$ est une constante K qui ne peut plus dépendre que de la base a de l'exponentielle a^x. Ainsi $\varphi x = Ka^x$, et l'on a :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(a^x)}{dx} = Ka^x.$$

On pourrait chercher comme ci-dessus la nature de la fonction fa qui représente la constante K, et l'on trouverait facilement cette propriété :

$$fa + fb = f(ab) ;$$

d'où l'on voit que fa est de la nature des logarithmes, et peut être représentée par $c \log a$, c étant une constante qui ne dépend plus que du système de logarithmes que l'on voudrait choisir. Mais il est plus simple de ne considérer d'abord que l'exponentielle e^x, où e représente la base des logarithmes de Néper, et d'y réduire ensuite les autres exponentielles.

Pour $y = e^x$, on aurait donc :

$$\frac{dy}{dx} = Ke^x, \quad \text{d'où} \quad K = \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)}{y}:$$

or quand $x = 0$, $y = 1$, et par conséquent $K = \frac{dy}{dx}$, quand $x = 0$. Mais la base e des logarithmes de Néper est telle que la première raison de l'accroissement Δy du nombre à l'accroissement Δx du logarithme, est l'unité à l'origine des logarithmes. Ainsi $\frac{dy}{dx}$ est 1, quand $x = 0$, et l'on a $K = 1$ dans le système de Néper; on a donc:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d(e^x)}{dx} = e^x.$$

Actuellement a^x peut être changée en e^{xla} : donc en différentiant, $\frac{d(a^x)}{dx} = e^{xla}.la = a^x.la$. Et la constante fa n'est autre chose que le logarithme même de la base a, dans le système des logarithmes naturels.

X.

On pourrait aller plus loin et varier les démonstrations; mais ces exemples suffisent : et d'ailleurs, par la conversion mutuelle des sinus et des exponentielles, toutes les fonctions que l'on considère en analyse peuvent se réduire aux deux fonctions x^m et a^x. Quant aux fonctions inverses, log x, arc sin $= x$, etc., leurs différentielles, par la seule application de la seconde règle, se déduiront des précédentes sans aucune difficulté.

Ainsi le calcul différentiel est compris en entier dans les trois règles générales que nous avons données. La première est la définition même de la *fonction différentielle*, et les deux autres sont l'expression des lois par lesquelles la différentielle d'une fonction composée de plusieurs autres, se compose des différentielles relatives à chacune d'elles. Ces lois sont, comme on voit, très-simples, et il est bien digne de remarque qu'elles soient semblables à celles de la composition des forces ou des mouvemens dans l'espace.

Sur le changement de la variable indépendante ou transformation des fonctions différentielles. (Extrait des leçons d'analyse de M. Poinsot.)

I.

Soit y une fonction quelconque de x, $y=fx$; on aura, comme on l'a vu, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., pour les coefficiens différentiels de y par rapport à x. Mais si l'on imagine que x devienne fonction d'une troisième variable t (auquel cas y devient aussi fonction de t), et qu'on prenne les coefficiens différentiels de y par rapport à t, on aura, par le principe de la différentiation d'une fonction de fonction (2°. *régle*) :

$$\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}, \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},$$

ce qui donne ce théorême :

Le coefficient différentiel d'une fonction y de x pris relativement à x, est égal au rapport des coefficiens différentiels de y et x, pris relativement à la variable t, dont on les suppose toutes deux devenues fonctions.

On aurait donc de même, en désignant pour un moment $\frac{dy}{dx}$ par p : $\frac{dp}{dx}=\frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, ou en mettant pour p sa valeur, et développant les différentiations

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^3},$$

et ainsi de suite.

Ainsi l'on a ces formules fondamentales :

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}, \\
\frac{d^2y}{dx^2} &= \frac{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)}, \\
\frac{d^3y}{dx^3} &= \frac{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} + 3\frac{dy}{dt}\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 - \frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^3x}{dt^3}}{\left(\frac{dx}{dt}\right)^5}, \\
&\text{etc....}
\end{aligned}\right\}(A)$$

dont la loi est uniforme, puisque chacune d'elles se déduit de la précédente en la différentiant par rapport à t, et divisant ensuite par $\frac{dx}{dt}$.

II.

Ces formules serviront à transformer toute expression différentielle en x, y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., en une autre qui renfermerait à-la-fois les coefficiens différentiels de x et y, mais pris relativement à une troisième variable t dont on les supposerait fonctions.

La fonction φt que l'on suppose au lieu de la variable x, est tout-à-fait arbitraire ; mais quand elle est choisie, y devient nécessairement une fonction déterminée de t, qui est $y = f(\varphi t)$, afin que par l'élimination de t entre les deux équations $x = \varphi t$ et $y = f(\varphi t)$, on retrouve $y = f(x)$ qui est l'équation proposée.

III.

Si l'on supposait simplement $x = t$, on aurait :

$$\frac{dx}{dt} = 1, \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^3x}{dt^3} = 0, \text{ etc.,}$$

et les formules précédentes (A) redeviendraient :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dx}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d^2y}{dx^2}, \text{ etc.},$$

comme cela doit être.

Mais si l'on suppose x une telle fonction de t qu'il en résulte pour y, $y=t$, alors on a : $\frac{dy}{dt}=1$, $\frac{d^2y}{dt^2}=0$, etc., et les formules (A) deviennent :

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\left(\frac{dx}{dy}\right)}, \quad \frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{\frac{d^2x}{dy^2}}{\left(\frac{dx}{dy}\right)^3}, \text{ etc.}$$

Ce sont les formules nécessaires pour passer des coefficiens différentiels de y relatifs à x, aux coefficiens différentiels de x relatifs à y, ou des coefficiens différentiels d'une fonction aux coefficiens différentiels de la fonction inverse.

Sachant, par exemple, que $y=\sin x$ donne $\frac{dy}{dx}=\cos x$, en transformant $\frac{dy}{dx}$ en $\frac{1}{\frac{dx}{dy}}$, on en conclut tout de suite :

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\cos x}, \quad \frac{d(\text{arc }\sin = y)}{dy}=\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}.$$

IV.

Si l'on suppose, en général, pour x une telle fonction de t qu'il en résulte $t=\psi(x,y)$, ψ désignant une fonction donnée, on aura :

$$1=\frac{d\psi}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{d\psi}{dy}\cdot\frac{dy}{dt},$$

$$0=\frac{d^2\psi}{dx^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{d\psi}{dx}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2\psi}{dy^2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2+\frac{d\psi}{dy}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}+2\frac{d^2\psi}{dxdy}\cdot\frac{dx}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

$$0=\text{etc.}$$

Et au moyen de ces différentes équations, on éliminera des formules générales (A), $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc., ou $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, etc. ; ce qui leur donnera une forme particulière relative à la fonction $\psi(x,y)$ que l'on aura choisie pour t.

On voit même que pour chasser $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc.; ou $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, etc., il n'est pas nécessaire de connaître la fonction $\psi(x, y)$ que l'on prend pour variable indépendante t; mais qu'il suffirait d'avoir son coefficient différentiel relatif à t. Ainsi je suppose que $\psi(x, y)$ soit la fonction inconnue de x et de y qui représente l'arc s de la courbe, dont $y = fx$ est l'équation.

On a vu que $\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$, et par conséquent, on aura :

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}.$$

Donc en faisant $s = t$, comme on le suppose ici, on aura :

$$1 = \sqrt{\frac{dx^2}{dt} + \frac{dy^2}{dt^2}},$$

ou bien :
$$1 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2,$$

et différentiant :
$$0 = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2},$$
$$0 = \text{etc.}$$

Au moyen de quoi on chassera des formules (A) les coefficiens $\frac{dx}{dt}$, $\frac{d^2x}{dt^2}$, etc., ou $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, ce qui donnera, en remettant s au lieu de t, pour mieux rappeler que t doit être l'arc même de la courbe :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{ds}}{\sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2}}; \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d^2y}{ds^2}}{\left(1 - \left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right)^2}, \text{ etc.};$$

ou bien $\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{dx}{ds}\right)^2}}{\frac{dx}{ds}}$, etc.

V.

Si l'on prend $t =$ arc sin $= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} =$ arc cos $\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, on en tirera de même des équations au moyen desquelles on pourra éliminer des formules générales, les coefficiens différentiels de x ou de y relativement à t, ce qui leur donnera une forme particulière relative à cette hypothèse.

Si l'on fait $t = \varphi =$ arc sin $= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, et en même tems $\sqrt{x^2+y^2} = r$; on aura $y = r \sin \varphi$, $x = r \cos \varphi$, et l'on en tirera les valeurs $\frac{dx}{d\varphi}$, $\frac{dy}{d\varphi}$, $\frac{d^2x}{d\varphi^2}$, $\frac{d^2y}{d\varphi^2}$, etc., en $\frac{dr}{d\varphi}$, $\frac{d^2r}{d\varphi^2}$, etc., et substituant dans les formules générales (A), on aura les coefficiens différentiels $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$, etc., transformés en coefficiens différentiels du rayon vecteur r (mené de l'origine comme foyer), par rapport à l'angle φ que forme ce rayon vecteur avec l'axe des abscisses.

VI.

On peut appliquer ces formules aux différentes expressions des sous-tangentes, sous-normales, à celle du rayon de courbure, et en général à toutes les expressions ou équations différentielles qui pourraient s'offrir.

Par exemple, le rayon de courbure R est, en fonction différentielle de l'ordonnée y relativement à l'abscisse x :

$$R = \frac{\left(1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}.$$

Si l'on regarde x et y comme fonctions d'une troisième variable quelconque t, cette expression devient :

$$R = \frac{\left\{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{\frac{dx}{dt}\cdot\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\cdot\frac{d^2x}{dt^2}}.$$

Si l'on y suppose $x=t$, elle redonne la première. Si l'on fait $y=t$, elle donne celle-ci :

$$R=\frac{\left\{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{-\frac{d^2x}{dy^2}},$$

qui ne diffère de la première que par le changement de x en y, et par le signe ; elle diffère par le signe, parce que la courbe ne peut être concave vers x sans être convexe vers y, et réciproquement.

Si l'on suppose $t=s=$ la fonction de x et y qui mesure l'arc s de la courbe proposée, la formule devient :

$$R=\frac{\sqrt{\left(1-\left(\frac{dy}{ds}\right)^2\right)}}{\frac{d^2y}{ds^2}},$$

et cette expression sera la plus commode dans le cas où l'équation de la courbe serait immédiatement donnée entre l'ordonnée et l'arc. Soit, par exemple, un cercle dont s est l'arc, y l'ordonnée, a le rayon ; on a :

$$y=a\sin\left(\frac{s}{a}\right);\ \text{d'où}\ \frac{dy}{ds}=\cos\left(\frac{s}{a}\right),\ \frac{d^2y}{ds^2}=-\frac{1}{a}\sin\left(\frac{s}{a}\right);$$

et

$$R=\frac{\sqrt{1-\cos^2\left(\frac{s}{a}\right)}}{\frac{1}{a}\sin\left(\frac{s}{a}\right)}=a=\text{au rayon.}$$

Soit encore l'équation $\sqrt{2a(2a-y)}=4a-s$, qui appartient à une cycloïde, dont y serait l'ordonnée perpendiculaire à la base, s l'arc correspondant qui commence avec y, a étant le diamètre du cercle générateur ; on aura :

$$\left(\frac{dy}{ds}\right)^2=1-\frac{y}{2a},\quad \frac{d^2y}{ds^2}=-\frac{1}{4a}\quad \text{et}\quad R=2\sqrt{2ay},$$

ainsi le rayon courbure est double de la corde menée du point décrivant au point de contact du cercle générateur avec la base.

VII.

Enfin si dans l'expression générale du rayon de courbure, vous faites $t = r = \sqrt{x^2+y^2}$, vous pourrez mettre cette formule en $\frac{dy}{dr}$, $\frac{d^2y}{dr^2}$, ou bien en $\frac{dx}{dr}$, $\frac{d^2x}{dr^2}$, selon que vous voudrez éliminer les coefficiens différentiels de x ou de y, relativement à cette troisième variable r; et vous auriez le rayon de courbure par l'ordonnée et le rayon vecteur r. Vous pourriez ensuite regarder y et r comme fonction d'une troisième variable, et remettre la formule d'une manière générale en :

$$\frac{dy}{dt},\ \frac{d^2y}{dt^2},\ \frac{dr}{dt},\ \frac{d^2r}{dt^2};$$

faire ensuite $t = \varphi = \text{arc sin}\,\frac{y}{r}$, et chasser $\frac{dy}{dt}$, $\frac{d^2y}{dt^2}$, et vous auriez le rayon de courbure en :

$$r,\ \frac{dr}{d\varphi},\ \frac{d^2r}{d\varphi^2};$$

mais vous pouvez éviter cette double transformation pour passer aux coordonnées polaires r et φ, en posant tout de suite, comme on l'a fait ci-dessus :

$$y = r\sin\varphi, \qquad \text{et} \qquad x = r\cos\varphi;$$

d'où en tirant les fonctions,

$$\frac{dy}{d\varphi},\ \frac{d^2y}{d\varphi^2},\ \frac{dx}{d\varphi},\ \frac{d^2x}{d\varphi^2},$$

et substituant dans l'expression générale (VI), après y avoir changé t en φ; vous aurez :

$$R = \frac{\left\{r^2 + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}}{r^2 + 2\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 - r.\frac{d^2r}{d\varphi^2}}.$$

On considère encore l'angle ω que la tangente de la courbe fait avec le rayon vecteur, et qui est égal à l'angle formé par cette tangente avec l'axe des abscisses, moins l'angle formé par le rayon vecteur avec le même axe. Or, le premier de ces angles a pour tangente : $\frac{\frac{dy}{d\varphi}}{\frac{dx}{d\varphi}}$; le second, $\frac{y}{x}$; et vous trouverez que la tangente

de la différence ω, sera en coordonnées polaires r et φ :

$$\text{tang}\,\omega = \frac{r}{\frac{dr}{d\varphi}}.$$

Ces formules seront utiles pour un grand nombre de courbes, dont l'équation est très-simple en coordonnées polaires, et entre autres pour les spirales.

Soit, par exemple, la spirale logarithmique, dont l'équation est, $r = a^{\varphi}$; on trouve pour la tangente de l'inclinaison ω de cette courbe sur le rayon vecteur r, $\text{tang}\,\omega = \frac{1}{la}$, la étant le logarithme hyperbolique de a. Ainsi la spirale logarithmique est une courbe qui est toujours également inclinée sur le rayon vecteur.

Pour le rayon de courbure, on trouve, en substituant les valeurs de $\frac{dr}{d\varphi}$, $\frac{d^2r}{d\varphi}$, dans la formule précédente :

$$R = r\sqrt{1 + (la)^2}.$$

Ce qui fait voir que la courbure est en raison inverse du rayon vecteur.

Si a est la base e des logarithmes de Néper, $le = 1$. Le rayon de courbure devient $r\sqrt{2}$, et la tangente de ω est égale à l'unité.

VIII.

Ce qu'on vient de dire dans cet extrait renferme la théorie de la transformation des fonctions différentielles, ou du changement de la *variable indépendante*. Dans le calcul des fluxions, ce serait le changement de la variable *uniforme*, ou dont la fluxion est prise pour unité. Dans le système des infiniment petits de Leibnitz, c'est le changement de la variable dont la différentielle est regardée comme *constante*. Mais ces diverses dénominations ne repondent, comme on voit, qu'aux divers points de vue sous lesquels on peut envisager le calcul différentiel ; et toute cette théorie n'est qu'une application continuelle de la seconde règle générale de ce calcul ; comme le Calcul différentiel relatif aux fonctions de plusieurs variables *indépendantes*, n'est qu'une application de la troisième règle, où l'on différentie toujours comme si les variables étaient fonctions d'une seule, mais où l'on ne perd jamais de vue qu'elles en sont des fonctions tout-à-fait *arbitraires*, ce qui laisse ces variables dans l'état d'indépendance où elles étaient supposées.

Analyse appliquée à la géométrie;
par M. HACHETTE.

Les questions d'analyse appliquée à la géométrie, dont on fait le plus souvent usage dans la mécanique, et les seules qui soient indispensables pour étudier cette science, sont relatives aux courbures des surfaces et des lignes.

J'ai réuni dans cet article les propositions démontrées par Euler, Monge et Meusnier. J'y ai ajouté des extraits de deux Mémoires qui ont été publiés par MM. Dupin et Lancret, anciens élèves de l'Ecole Polytechnique, l'un de M. Dupin, sur les tangentes *conjugées* que je nommerai *tangentes réciproques;* l'autre sur les développoïdes des courbes à double courbure.

I.

De la courbure des surfaces.

L'équation différentielle du premier ordre d'une surface étant :

$$dz = pdx + qdy, \qquad (1)$$

on sait que les quantités p et q déterminent la direction du plan qui touche la surface au point x, y, z; c'est par cette raison qu'on les appelle *élémens du contact du premier ordre.* Différentiant l'équation (1), en regardant les différentielles dx et dy comme constantes; et supposant qu'on ait :

$$dp = rdx + sdy,$$
$$dq = sdx + tdy,$$

on a :

$$d^2z = rdx^2 + 2\,sdxdy + tdy^2. \qquad (2)$$

Les quantités r, s et t sont des fonctions de x et y, qu'on nomme *élémens du contact du second ordre*, parce qu'elles déterminent les rayons de courbure des sections planes de la surface, qui passent par le point x, y, z. Supposons que ce point soit l'origine des coordonnées, et en même tems le point où le plan des xy touche la surface; l'axe des z sera une normale de cette surface, et le rayon de courbure d'une section normale passant par la droite $y = \alpha x$, sera $\dfrac{1}{\left(\dfrac{d^2z}{dx^2+dy^2}\right)}$. A cause de $\dfrac{dy}{dx} = \alpha$, ce rayon

de courbure sera $\dfrac{1}{\left(\dfrac{d^2z}{dx^2(1+\alpha^2)}\right)}$: l'équation (2) donne :

$$\frac{d^2z}{dx^2}=r+2s\alpha+t\alpha^2.$$

Substituant cette valeur dans l'expression du rayon ρ de courbure,

$$\rho=\frac{1+\alpha^2}{r+2s\alpha+t\alpha^2}. \tag{3}$$

La grandeur de ce rayon dépend évidemment de la tangente trigonométrique α, qui peut varier, tandis que les quantités r, s et t sont constantes. Pour obtenir le plus grand et le plus petit rayon de courbure des sections normales, on aura :

$$d\left\{\frac{1+\alpha^2}{r+2s\alpha+t\alpha^2}\right\}=0;$$

d'où l'on tire :

$$\alpha^2+\alpha\left(\frac{r-t}{s}\right)-1=0. \tag{4}$$

Nommant m et m' les deux racines de cette équation, on a :

$$mm'=-1 \quad \text{ou} \quad 1+mm'=0;$$

c'est ainsi qu'Euler a prouvé que le plus grand et le plus petit rayon de courbure des sections normales, correspondaient à deux sections, dont les plans font entre eux un angle droit ; on peut donc supposer que ces plans se confondent avec les plans des xz et des yz. Les valeurs ρ' et $\rho_,$ du plus grand et plus petit rayon de courbure étant :

$$\rho'=\frac{1+m^2}{r+2sm+tm^2}, \qquad \rho_,=\frac{1+m'^2}{r+2sm'+tm'^2},$$

elles deviennent, en supposant $m=0$, $m'=\infty$,

$$\rho'=\frac{1}{r}, \qquad \rho_,=\frac{1}{t}.$$

Les valeurs de m et m' étant données par l'équation (4),

$$m^2+m\left(\frac{r-t}{s}\right)-1=0. \tag{4'}$$

Il est évident que l'hypothèse de $m=0$ ou $=\infty$, donne $s=0$:

donc l'expression de ρ donnée par l'équation (3) se réduit à :

$$\rho = \frac{1+\alpha^2}{r+t\alpha^2}.$$

Mettant pour r et t leurs valeurs $\frac{1}{\rho'}$, $\frac{1}{\rho_{,}}$,

$$\rho = \frac{1+\alpha^2}{\frac{1}{\rho'}+\frac{\alpha^2}{\rho_{,}}} = \frac{\rho'\rho_{,}(1+\alpha^2)}{\rho_{,}+\rho'\alpha^2} = \frac{\rho'\rho_{,}}{\rho_{,}\cdot\frac{1}{1+\alpha^2}+\rho'\cdot\frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}}.$$

Nommant A, l'angle des plans normaux qui contiennent les sections dont les rayons sont ρ et ρ', et dont la tangente trigonométrique est α, on a :

$$\operatorname{tang} A = \alpha, \qquad \sin^2 A = \frac{\alpha^2}{1+\alpha^2}, \qquad \cos^2 A = \frac{1}{1+\alpha^2},$$

$$\rho = \frac{\rho'\rho_{,}}{\rho'\sin^2 A + \rho_{,}\cos^2 A}, \text{ ou } \frac{1}{\rho} = \frac{1}{\rho'}\sin^2 A + \frac{1}{\rho'}\cos^2 A. \quad (5)$$

De ces quatre quantités ρ, ρ', $\rho_{,}$ et l'angle des plans normaux qui contiennent les rayons ρ et ρ', ou les rayons ρ et $\rho_{,}$, trois quelconques déterminent la quatrième, dont la valeur sera donnée par l'équation (5). (*Cette relation a été trouvée par Euler.*)

L'équation (5) fait voir que les rayons de courbure de deux sections normales, dont les plans font avec les plans des sections normales de plus grande ou plus petite courbure des angles égaux, sont de même grandeur.

Dans la même hypothèse de $m=0$, ou de $m'=\infty$, les plans des sections normales de plus grande et plus petite courbure, coïncident avec les plans des xz et des yz, et on a :

$$\rho' = \frac{1}{r}, \quad \text{et} \quad \rho_{,} = \frac{1}{t},$$

et par conséquent :

$$\frac{1}{\rho'} + \frac{1}{\rho_{,}} = r + t,$$

Ce dernier résultat est indépendant du choix des plans des coordonnées ; en effet, on a pour un rayon quelconque ρ d'une section normale :

$$\rho = \frac{1+\alpha^2}{r+2s\alpha+t\alpha^2}, \quad (3)$$

Et pour le rayon ρ_p de la section normale, perpendiculaire à la première :

$$\rho_p = \frac{1+\frac{1}{\alpha^2}}{r-\frac{2s}{\alpha}+\frac{t}{\alpha^2}} = \frac{1+\alpha^2}{r\alpha^2-2s\alpha+t}:$$

donc

$$\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho_p}=r+t, \qquad (6)$$

quel que soit α. (*Dupin*, Correspondance, pag. 218, tom. Ier.)

Combinant les équations (3) et (4) (*) pour éliminer α, on obtient l'équation suivante :

$$(rt-s^2)\rho^2-(r+t)\rho+1=0; \qquad (7)$$

d'où l'on tirerait pour l'expression du rayon de la section normale de plus petite ou plus grande courbure : $\frac{2}{r+t\pm\sqrt{4s^2+(t-r)^2}}$.

La valeur de ρ déduite de cette équation (7), n'appartient pas seulement au rayon de la section normale de plus grande ou plus

---

(*) *Calcul de l'élimination de* α.

Éliminant α^2 au moyen des équations (3) et (4), on trouve pour α la valeur suivante :

$$\alpha=\frac{2s-s\rho(t+r)}{2s^2\rho+(t+r)(t\rho-1)}.$$

Résolvant l'équation (4), on a pour seconde valeur de α :

$$\alpha=\frac{t-r\pm\sqrt{4s^2+(t-r)^2}}{2s}.$$

Égalant ces deux valeurs de α, on a :

$$(t\rho-1)(4s^2+(t-r)^2)\pm(2s^2\rho+(t-r)(t\rho-1))\sqrt{4s^2+(t-r)^2}=0,$$

divisant par $\sqrt{4s^2+(t-r)^2}$,

$$(t\rho-1)\sqrt{4s^2+(t-r)^2}+2s^2\rho+(t-r)(t\rho-1)=0.$$

Élevant au carré pour faire disparaître le radical, et réduisant, on parvient à l'équation (7) :

$$(rt-s^2)\rho^2-(r+t)\rho+1=0.$$

petite courbure; elle est encore égale à la portion de la normale comprise entre la surface et le point de rencontre de cette normale, et d'une autre normale qui en est infiniment voisine. M. Monge est le premier qui a démontré cette propriété générale des surfaces (*), qu'une normale quelconque n'est rencontrée que par deux autres normales, qui en soient infiniment voisines; les portions de normale comprises entre les points de rencontre et la surface, sont égales aux rayons des sections normales de plus petite et de plus grande courbure. Pour le démontrer, soit:

$$x^2 + y^2 + (z - \rho)^2 = \rho^2,$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2\rho z;$$

l'équation d'une sphère du rayon ρ qui touche le plan des xy, à l'origine des coordonnées. Les équations de la normale au point x, y, z d'une surface $dz = pdx + qdy$, sont:

$$x' - x + p(z' - z) = 0,$$
$$y' - y + q(z' - z) = 0.$$

Pour que la normale passe par le centre de la sphère, dont les coordonnées sont $x' = 0$, $y' = 0$, $z' = \rho$, on doit avoir:

$$\left.\begin{array}{l} -x + p(\rho - z) = 0, \\ -y + q(\rho - z) = 0. \end{array}\right\} \quad (n)$$

Pour une normale infiniment voisine, assujétie à passer par le même centre ($x' = 0$, $y' = 0$, $z' = \rho$), les équations (n) deviendront:

$$-(x + dx) + (p + dp)(\rho - (z + dz)) = 0,$$
$$-(y + dy) + (q + dq)(\rho - (z + dz)) = 0,$$

retranchons-en les équations (n), et on a:

$$\left.\begin{array}{l} -dx + dp(\rho - z) - pdz = 0, \\ -dy + dq(\rho - z) - qdz = 0: \end{array}\right\} \quad (n')$$

les deux systêmes d'équations (n) et (n') expriment que deux normales consécutives se coupent au point ($x' = 0$, $y' = 0$, $z' = \rho$). Mais lorsque le point de la surface que l'on considère, est à l'origine des coordonnées, on a:

$$x = 0, \quad y = 0, \quad z = 0, \quad p = 0, \quad q = 0;$$

donc les quatre équations (n) et (n') se réduisent à ces deux ci:

$$-dx + \rho dp = 0, \qquad -dy + \rho dq = 0,$$

(*) Ce théorême est une conséquence d'une proposition plus générale, qui sera démontrée page 152.

d'où l'on tire :

$$\rho = \frac{dx}{dp}, \quad \text{ou} \quad \rho = \frac{dy}{dq},$$

et $$dxdq - dydp = 0.$$

Mettant dans cette équation pour dp et dq, leurs valeurs $rdx+sdy$, et $sdx+tdy$, on aura :

$$dx\,(sdx + tdy) - dy\,(rdx + sdy) = 0,$$

ou $$\frac{dy^2}{dx^2} + \left(\frac{r-t}{s}\right)\frac{dy}{dx} - 1 = 0, \qquad (4)$$

équation identique à l'équation (4) trouvée page 133, dans laquelle $a = \frac{dy}{dx}$.

L'équation $\rho = \frac{dx}{dp}$, donne $\frac{dy}{dx} = \frac{1 - r\rho}{s\rho}$; mettant cette valeur dans l'équation (4), on obtient l'équation (7, pag. 135),

$$(rt - s^2)\,\rho^2 - (r + t)\,\rho + 1 = 0. \qquad (7)$$

Le rayon ρ qui a pour valeurs les racines de cette équation, est ce qu'on nomme le *rayon de courbure de la surface ;* il est en même tems le rayon de la section normale de plus grande ou plus petite courbure.

L'équation (5) établit la relation qui existe entre les rayons de courbure d'une surface et les rayons de courbure des sections normales. L'angle A qui entre dans cette équation, est la différence de deux angles, dont on connaîtra les tangentes par les équations (3) et (4'). Nous allons maintenant chercher la relation qui existe entre les rayons de courbure d'une section normale et d'une section oblique qui ont une tangente commune; et pour simplifier le calcul, nous supposerons que cette tangente est l'axe des x; que le point de contact est à l'origine des coordonnées, et enfin que le plan des xy touche la surface. Dans cette hypothèse, le plan des xz contient la section normale, le rayon de courbure de cette section est $\frac{1}{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}$, et le rayon de courbure de la section oblique, est $\frac{1}{\left(\frac{d^2z'}{dx^2}\right)}$, en supposant $z' = \frac{z}{\cos\theta}$, et θ étant l'angle des plans des sections normale et oblique.

Cette valeur de z' donne :

$$\frac{d^2z'}{dx^2} = \frac{d^2z}{dx^2 \cos\theta}.$$

Nommant R et R' les rayons de courbure des deux sections, on a :

$$R = \frac{1}{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)}, \qquad R' = \cos\theta \times \frac{1}{\left(\frac{d^2z}{dx^2}\right)} :$$

donc $$R' = R \cos\theta. \qquad (8)$$

Ce rapport entre les deux rayons R et R', fait voir que les cercles osculateurs de toutes les courbes d'une surface, dont les plans passent par une tangente de cette surface, appartiennent à une sphère dont le rayon est égal au rayon de courbure de la section normale qui passe par la même tangente. (*Théoréme de Meusnier.*)

II.

Des tangentes réciproques (*).

Pour définir ces tangentes, il faut supposer qu'un plan tangent à une surface, passe d'une position quelconque, à une position infiniment voisine. Des deux *tangentes réciproques*, l'une est l'intersection de deux plans tangens consécutifs, et l'autre est le prolongement de la droite menée sur la surface par les deux points de contact infiniment voisins.

Soit comme précédemment :

$$dz = pdx + qdy,$$

l'équation différentielle d'une surface. Lorsqu'on suppose que le plan des xy touche la surface à l'origine des coordonnées, on a :

$$dz = 0, \quad pdx + qdy = 0.$$

Ayant mené par le point de contact, une droite de l'équation $y = \alpha x$, on aura pour le point de contact de la droite et de la surface :

$$\frac{dy}{dx} = \alpha, \quad p + q\alpha = 0.$$

(*) *Ce paragraphe est extrait des Mémoires de M. Dupin.*

Si l'on passe du premier plan tangent (celui des xy) à un second plan tangent infiniment voisin, qui coupe le premier suivant la droite $y = \alpha x$, on a pour le point de contact de ce second plan :

$$(p + dp) + \alpha (q + dq) = 0, \quad \text{ou} \quad dp + \alpha dq = 0,$$

et en mettant pour dp et dq, leurs valeurs :

$$r + s\frac{dy}{dx} + \alpha\left(s + \frac{tdy}{dx}\right) = 0. \qquad (9)$$

Cette équation contient la quantité $\frac{dy}{dx}$, qui détermine la direction de la droite menée sur la surface, par les points des contact des deux plans tangens consécutifs. Désignant cette quantité par α', la droite $y = \alpha' x$ est *la tangente réciproque* de celle dont l'équation donnée, est $y = \alpha x$. Cette réciprocité consiste en ce que les constantes α, α' qui déterminent ces tangentes, sont liées entre elles par une équation réciproque (*), dans laquelle on peut changer α en α', ou α' en α. Cette équation est :

$$r + s\alpha' + \alpha (s + t\alpha') = 0, \qquad (9)$$

ou

$$\frac{r}{t} + \frac{s}{t}(\alpha + \alpha') + \alpha\alpha' = 0.$$

Lorsque les tangentes réciproques sont rectangulaires, on a $\alpha\alpha' = -1$; et l'équation (9) devient

$$\alpha^2 + \alpha\left(\frac{r - t}{s}\right) - 1 = 0: \qquad (1)$$

elle ne diffère pas de l'équation (4) trouvée page 137; ce qui prouve que dans ce cas, les tangentes réciproques appartiennent aux sections normales de plus petite et plus grande courbure.

(*) M. Monge avait déja remarqué cette propriété des tangentes réciproques, par rapport aux deux courbes d'une surface, qu'il a nommées *caractéristique*, et *trajectoire* des caractéristiques. Il exprime cette propriété de la manière suivante : (*voyez* son ouvrage d'Analyse appliquée à la géométrie, édition 1809, pag. 375.)

« La surface développable qui touche une surface enveloppe dans la caractéristique, et celle qui touche l'enveloppe dans la trajectoire, sont réciproques « en cela, que la première est le lieu des tangentes aux différentes trajectoires, « dont les points de contact sont pris sur la même caractéristique, tandis que « la seconde est le lieu des tangentes aux différentes caractéristiques, dont les « points de contact sont pris sur une même trajectoire. »

« Cette propriété mérite une grande attention, parce que c'est son expression « qui nous produira les deux équations aux différences ordinaires de la caractéristique. »

Des rayons de courbure des sections normales, menées par les tangentes réciproques.

Les sections normales, menées par les tangentes réciproques, jouissent de cette propriété, que la somme des rayons de courbure de ces deux sections menées par la même normale de la surface, est une quantité constante ; et comme les tangentes des sections de plus petite et de plus grande courbure sont réciproques, cette quantité est égale à la somme des rayons de courbure de la surface, qui correspondent au point d'intersection de ces tangentes.

Nommons ρ_d et $\rho_{d'}$ les deux rayons de courbure des sections normales, menées par les tangentes conjuguées $y = \alpha x$, $y = \alpha' x$; on aura :

$$\rho_d = \frac{1 + \alpha^2}{r + 2s\alpha + t\alpha'^2}, \qquad \rho_{d'} = \frac{1 + \alpha'^2}{r + 2s\alpha' + t\alpha'^2}, \qquad (3)$$

et les quantités α, α' sont liées entre elles par l'équation :

$$\frac{r}{t} + \frac{s}{t}(\alpha + \alpha') + \alpha\alpha' = 0. \qquad (9)$$

Tirant de cette équation la valeur de α', et la substituant dans l'expression (3) de $\rho_{d'}$, on a :

$$\rho_{d'} = \frac{r^2 + s^2 + 2s\alpha(r + t) + \alpha^2(s^2 + t^2)}{(rt - s^2)\{r + 2s\alpha + t\alpha^2\}};$$

d'où il suit :

$$\rho_d + \rho_{d'} = \frac{r + t}{rt - s^2}.$$

L'équation (7) fait voir que le coefficient $\frac{r+t}{rt - s^2}$ de ρ, pag. 137, est la somme des deux rayons de courbure ρ' et $\rho_,$ de la surface.

On a vu (page 132) qu'en prenant les plans des sections normales de plus grande et de plus petite courbure, pour plan des xz et des yz, les rayons de courbure de la surface ρ' et $\rho_,$ avaient pour expressions $\frac{1}{r}$ et $\frac{1}{t}$. Dans cette hypothèse, on a $s = 0$, et l'équation (9) se réduit à :

$$\frac{r}{t} + \alpha\alpha' = 0.$$

Prenons pour exemple l'ellipsoïde qui a pour sommet l'origine

des coordonnées, et dont les diamètres principaux sont parallèles aux axes des coordonnées; l'équation de cet ellipsoïde sera :

$$\frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{b^2}y^2+\frac{1}{c^2}(z-c)^2=1,$$

ou

$$\frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{b^2}y^2+\frac{1}{c^2}z^2-\frac{2z}{c}=0.$$

Prenant les différences partielles de cette équation, on trouve dans l'hypothèse de $x=0$, $z=0$, $p=0$, $q=0$,

$$r=\frac{c}{a^2},\quad t=\frac{c}{b^2},\quad s=0:$$

donc

$$\rho'=\frac{a^2}{c},\quad \rho_{,}=\frac{b^2}{c};$$

ce qui signifie que les rayons de courbure au sommet de l'ellipsoïde, sont égaux aux rayons de courbure des deux sections principales qui passent par ce sommet.

L'équation des tangentes réciproques $\frac{r}{t}+\alpha\alpha'=0$, devient $\frac{b^2}{a^2}+\alpha\alpha'=0$; ce qui apprend que les tangentes réciproques se confondent en direction avec les diamètres conjugués de la section principale de l'ellipsoïde,

$$\frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{b^2}y^2=1,$$

section dont le plan est parallèle à celui des xy, tangent à la surface.

Cette dernière propriété étant le sujet principal du Mémoire de M. Dupin sur les tangentes réciproques, il les a nommées par cette raison *tangentes conjuguées*.

III.

Des courbes à double courbure.

De l'élément d'une courbe à double courbure.

Une courbe à double courbure étant projetée sur les plans rectangulaires des xz et des yz, les équations des projections de cette courbe, sont :

$$y=\varphi x,\qquad z=\psi x,$$

φ et ψ étant des fonctions dont la forme dépend de la nature de la courbe.

L'élément d'une courbe à double courbure correspondant au point x, y, z, a pour expression $\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$; et a cause de $dy = dx\varphi'x$, $dz = dx\psi'x$, et écrivant pour abréger φ' et ψ', au lieu de $\varphi'x$ et $\psi'x$, on a pour l'expression de l'élément d_s de la courbe,

$$d_s = dx\sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2}.$$

Des tangentes et des plans normaux d'une courbe à double courbure.

La tangente en un point de cette courbe dont les coordonnées sont x', $\varphi x'$, $\psi x'$, a pour équations de ses projections :

$$y - \varphi = (x - x')\varphi',$$
$$z - \psi = (x - x')\psi'.$$

Le plan normal à la courbe au point x', φ, ψ, est perpendiculaire à la tangente au même point : il a donc pour équation :

$$(z - \psi)\psi' + (y - \varphi)\varphi' + x - x' = 0,$$

équation d'un plan dont les traces sont perpendiculaires aux projections de la tangente.

Des plans osculateurs d'une courbe à double courbure.

Les tangentes d'une courbe à double courbure, prolongées indéfiniment, forment une surface développable à deux nappes séparées par la courbe même; un plan tangent à cette surface passe par deux tangentes consécutives, ou par deux élémens consécutifs de la courbe. On nomme ce plan, *plan osculateur de la courbe*. Cet équation est de la forme

$$z - \psi - B(y - \varphi) - A(x - x') = 0.$$

Différentiant deux fois de suite par rapport à x' seulement, on obtient deux équations; d'où l'on tire les valeurs suivantes de A et de B:

$$A = \frac{\psi'\varphi'' - \psi''\varphi'}{\varphi''}, \qquad B = \frac{\psi''}{\varphi''}.$$

Mettant pour A et B leurs valeurs, l'équation du plan osculateur est :

$$(z - \psi)\varphi'' - (y - \varphi)\psi'' - (x - x')(\psi'\varphi'' - \psi''\varphi') = 0.$$

Des angles de contingence et de flexion.

L'angle de *contingence* d'une courbe à double courbure, est formé par deux tangentes consécutives, comprises dans le même plan osculateur ; il est égal à l'angle de deux plans normaux consécutifs, menés par les points de contact. L'angle *de flexion* désignera l'angle compris entre deux plans osculateurs consécutifs.

Soient u, u', u'' les cosinus des angles qu'un premier plan P fait avec les trois plans coordonnés ; en supposant que ces angles varient infiniment peu, leurs cosinus deviendront $u+du$, $u'+du'$, $u''+du''$; le second plan P' déterminé par les nouveaux angles, fera avec le premier un angle infiniment petit ; nommant ds le sinus de cet angle, je dis qu'on aura :

$$ds^2 = du^2 + du'^2 + du''^2 ;$$

car les différentielles du, du', du'' des cosinus u, u', u'', sont les projections de l'arc ds sur les trois plans rectangulaires. En effet, négligeant les infinimens petits du seconde ordre, la droite sur laquelle on compte l'arc ds est perpendiculaire à-la-fois aux deux plans P et P' : le plan mené par cette droite et par une perpendiculaire à l'un des plans coordonnés, contient les deux angles que le plan des coordonnées fait avec les plans P et P' ; d'où il suit que l'arc ds a pour projection sur ce même plan des coordonnées, la différence des cosinus $u+du$ et u ; c'est-à-dire la différentielle du. On prouve de la même manière que les différentielles du' et du'' sont les projections du petit arc ds sur les deux autres plans des coordonnées : donc on a l'équation très-simple :

$$ds = \sqrt{du^2 + du'^2 + du''^2}.$$

Étant donnée l'équation d'un plan :

$$Lx + My + Nz = 0,$$

on sait qu'il fait avec les trois plans des coordonnées, des angles dont les cosinus u, u', u'', ont pour expression :

$$\frac{L}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \quad \frac{M}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}, \quad \frac{N}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}.$$

Différentiant ces quantités, on aura les valeurs des trois différentielles du, du', du'', et par conséquent le sinus de l'angle formé par les deux plans qui ont pour équation :

le premier, $\qquad ux + u'y + u''z = 0$;

le second, $\quad (u+du)x + (u'+du')y + (u''+du'')z = 0.$

Prenons pour exemple, les plans normal et osculateur de la courbe à double courbure (page 142); on a pour le premier :

$$u=\frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2+\psi'^2}},\quad u'=\frac{\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2+\psi'^2}},\quad u''=\frac{\psi'}{\sqrt{1+\varphi'^2+\psi'^2}}.$$

Tirant de ces équations les valeurs de du, du', du'', et les substituant dans l'équation $ds=\sqrt{du^2+du'^2+du''^2}$, on a pour le sinus de l'angle de contingence dC :

$$\frac{dx'\sqrt{\varphi''^2+\psi''^2+(\varphi'\psi''-\varphi''\psi')^2}}{1+\varphi'^2+\psi'^2}=dC.$$

L'équation du plan osculateur (page 142) donne :

$$u=\varphi'\psi''-\varphi''\psi' \;:\; \sqrt{\varphi''^2+\psi''^2+(\varphi'\psi''-\varphi''\psi')^2},$$
$$u'=-\psi'' \;:\; \sqrt{\varphi''^2+\psi''^2+(\varphi'\psi''-\varphi''\psi')^2},$$
$$u''=\varphi'' \;:\; \sqrt{\varphi''^2+\psi''^2+(\varphi'\psi''-\varphi''\psi')^2};$$

et faisant pour abréger :

$$\varphi'\psi''-\varphi''\psi'=\pi'',\qquad \sqrt{\varphi''^2+\psi''^2+\pi''^2}=k,$$

on a :

$$u=\frac{\pi''}{k},\qquad u'=\frac{-\psi''}{k},\qquad u''=\frac{\varphi''}{k}.$$

En différentiant

$$\frac{du}{dx'}=\frac{k\pi'''-k'\pi''}{k^2},\quad \frac{du'}{dx'}=\frac{-k\psi'''+k'\psi''}{k^2},\quad \frac{du''}{dx'}=\frac{k\varphi'''-k'\varphi''}{k^2},$$

$$\frac{du^2+du'^2+du''^2}{dx'^2}=\left\{\begin{array}{l} k^2\pi'''^2-2kk'\pi''\pi'''+\pi''^2k'^2 \\ +\;k^2\psi'''^2-2kk'\psi''\psi'''+\psi''^2k'^2 \\ +\;k^2\varphi'''^2-2kk'\varphi''\varphi'''+\varphi''^2k'^2, \end{array}\right\}:k^4$$

l'expression de k donne :

$$k'^2=\frac{(\varphi''\varphi'''+\psi''\psi'''+\pi''\pi''')^2}{k^2}.$$

Substituant les valeurs de k^2 et de k'^2, on a :

$$\frac{du^2+du'^2+du''^2}{dx'^2}=\frac{(\psi'''\varphi''-\psi''\varphi''')^2+(\pi'''\varphi''-\pi''\varphi''')^2+(\pi'''\psi''-\pi''\psi''')^2}{(\varphi''^2+\psi''^2+\pi''^2)^2}.$$

Mettant pour π'' la quantité qu'elle représente, et observant que

$z''' = \varphi'\psi''' - \psi'\varphi'''$, on a pour l'expression du sinus de l'angle de *flexion* :

$$\sqrt{du^2 + du'^2 + du''^2} = \left\{ \frac{dx'(\varphi''\psi''' - \varphi'''\psi'')\sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2}}{\varphi''^2 + \psi''^2 + (\varphi'\psi'' - \varphi''\psi')^2} \right\} = dF,$$

dF étant l'angle de flexion (*).

Des rayons osculateurs d'une courbe à double courbure.

Le plan osculateur contient deux élémens consécutifs de la courbe ; si l'on conçoit dans ce même plan la circonférence qui passe par ces élémens ou par trois points consécutifs de la courbe, le rayon de ce cercle est ce qu'on nomme *le rayon de courbure de la courbe*, ou *le rayon du cercle osculateur*. L'élément de la courbe, et les deux rayons du cercle osculateur qui passent par les extrémités de cet élément, forment un triangle isocèle, dans lequel nommant $d\rho$ l'élément de la courbe ou du cercle osculateur, et R le rayon de ce cercle, on a $d\rho = RdC$, et par conséquent $R = \frac{d\rho}{dC}$. Mettant pour $d\rho$ sa valeur $dx'\sqrt{1 + \varphi'^2 + \psi'^2}$, et pour dC sinus de l'angle de contingence, l'expression trouvée ci-dessus (page 144), on a :

$$\text{Rayon de courbure, } R = \frac{(1 + \varphi'^2 + \psi'^2)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\varphi''^2 + \psi''^2 + (\psi''\varphi' - \psi'\varphi'')^2}}.$$

M. Lacroix a donné dans son Traité de calcul différentiel, in-4°., 2°. édition, page 627, cette formule plus complette qu'on déduirait facilement de ce qui précède :

$$R^2 = \frac{d\rho^6}{(dyd^2z - dzd^2y)^2 + (dzd^2x - dxd^2z)^2 + (dxd^2y - dyd^2x)^2}.$$

(*) On doit à M. Fourier, cette remarque ingénieuse, que les plans normaux à une courbe à double courbure, forment par leurs intersections succesives, une surface développable, dont l'arête de rebroussement a des angles de contingence et de flexion égaux aux angles de flexion et de contingence de la courbe à double courbure donnée ; chaque plan normal à cette courbe contenant les points des deux courbes, pour lesquels ces angles sont réciproquement égaux.

Cette proposition est une conséquence de la propriété de la pyramide supplémentaire. Il suffit de considérer la pyramide triangulaire, dont les arêtes seraient parallèles à trois tangentes consécutives d'une courbe à double courbure, et les trois plans perpendiculaires à ces tangentes, qui comprennent une seconde pyramide, supplémentaire de la première.

Des formules par lesquelles on trouve les points singuliers des Courbes à double courbure.

Les points singuliers des courbes à double courbure sont ceux pour lesquels les angles de contingence ou de flexion deviennent nuls. L'angle de contingence ne peut devenir nul que dans le cas où l'on a $\varphi'' = 0$, $\psi'' = 0$; ces formules sont aussi celles par lesquelles on trouverait les points de rebroussement des projections de la courbe, et ce qui doit être en effet ; car s'il y a rebroussement dans une courbe à double courbure, ce rebroussement affecte ses projections.

Quand aux points singuliers pour lesquels l'angle de flexion est nul, on les détermine par la formule (page 145) $dF = 0$, ou

$$\varphi''\psi''' - \varphi'''\psi'' = 0.$$

Pour que la courbe soit plane, il faut que cette équation de condition soit satisfaite par les valeurs des coordonnées d'un point quelconque de la courbe proposée.

IV.

Sur les développoïdes des courbes planes, et des courbes à double courbure.

Extrait d'un Mémoire lu à l'Institut, le 22 décembre 1806, par M. Lancret, imprimé en 1811, tom. II des Savans étrangers de l'Institut.

Si par tous les points d'une courbe plane ou à double courbure, on mène des lignes droites qui se rencontrent deux à deux consécutivement, en coupant la courbe sous un angle constant, ces droites sont les tangentes de la courbe que M. Lancret nomme *développoïde.*

Les développoïdes d'une courbe à double courbure, qui correspondent à l'angle sous lequel les tangentes de développoïdes coupent la courbe, sont d'autres courbes à double courbure, tracées sur une même surface. Cette surface est l'enveloppe de l'espace que parcourt un cône droit, dont le sommet se meut sur la courbe donnée, et dont l'axe s'applique successivement sur les tangentes de cette courbe. Lorsque la courbe donnée est plane, elle a un système de développoïdes situées dans le même plan que la courbe. Ces développoïdes planes jouissent d'une propriété remarquable, démontrée par Réaumur, Mémoires de l'Académie des sciences de

Paris, année 1709. Ce savant suppose qu'on ait mené deux droites infiniment voisines qui coupent une courbe plane sous un angle donné ; elles se rencontrent sur le plan de cette courbe en un point ; la portion de l'une ou l'autre secante, comprise entre ce point et le point de la courbe d'où elles partent, est ce qu'on nomme *rayon de la développoïde*. Réaumur a prouvé *qu'en faisant varier l'angle sous lequel deux droites consécutives coupent la courbe, les rayons de développoïdes correspondans à l'angle variable*, sont les cordes d'une circonférence, dont le diamètre est égal au rayon du cercle, *qui est osculateur de la courbe aux points infiniment voisins, par lesquels on a mené les secantes* (*).

Pour démontrer cette proposition, soit (fig. 1, pl. 1) $AMNB$ la courbe proposée ; MT, NT les tangentes aux points M et N ; MO, NO les droites qui coupent les tangentes sous les angles égaux tMO, TNO. Les trois points M, N, O, et le point T d'intersection des deux tangentes sont situés sur un cercle $MNOT$, tel que deux autres cordes quelconques MO', NO' de ce cercle, feront avec les tangentes MT, TN des angles égaux. Mais lorsque les points M et N seront infiniment voisins, le diamètre MR du cercle $MNOT$ sera le rayon de courbure de la courbe $AMNB$ au point M ; donc tous les rayons de développoïdes planes de cette courbe, et qui partent de l'un de ses points M, sont des cordes d'une circonférence, qui a pour diamètre le rayon du cercle osculateur de la courbe au même point M.

De la surface des développoïdes d'une courbe plane.

Soit $y = \varphi x$ l'équation de la courbe, l'équation de sa tangente en un point $\alpha, \varphi\alpha$, sera :

$$y - \varphi\alpha = (x - \alpha)\,\varphi'\alpha.$$

Le cône droit dont le sommet est au point de la courbe $\alpha, \varphi\alpha$, et qui a pour axe la tangente au même point, peut être considéré comme une surface de révolution composée de cercles, résultant de l'intersection de deux sphères variables ; la première du rayon arbitraire r, a pour équation :

$$(x - \alpha)^2 + (y - \varphi\alpha)^2 + z^2 = r^2 ; \qquad (1)$$

(*) Lorsque la courbe est à double courbure, le cercle osculateur suivant un élément de cette courbe, a pour rayon, le diamètre d'une circonférence qui est le lieu des extrémités des rayons de développoïdes, menés par les extrémités de cet élément dans le plan du cercle osculateur. H. C.

la seconde, du rayon $r \sin\omega$, (ω étant l'angle de l'axe et de la génératrice du cône), sera :

$$\left(x-\alpha-\frac{r\cos\omega}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\right)^2+\left(y-\varphi\alpha-\frac{r\varphi'\cos\omega}{\sqrt{1+\varphi'^2}}\right)^2+z^2=r^2\sin^2\omega. \quad (2)$$

Développant l'équation (2), la réduisant, et éliminant le rayon arbitraire r, on a pour l'équation du cône droit :

$$\{x-\alpha+\varphi'(y-\varphi\alpha)\}^2=\cos^2\omega\left((x-\alpha)^2+(y-\varphi\alpha)^2+z^2\right)(1+\varphi'^2). \quad (3)$$

Différentiant par rapport à α, seulement :

$$\left.\begin{array}{l}\{x-\alpha+(y-\varphi\alpha)\varphi'\alpha\}\left((y-\varphi)\varphi''-(1+\varphi'^2)\right)\\ =-\cos^2\omega\,(1+\varphi'^2)\,\{x-\alpha+(y-\varphi)\varphi'\}\\ +\cos^2\omega\,((x-\alpha)^2+(y-\varphi\alpha)^2+z^2)\,\varphi'\varphi''.\end{array}\right\} \quad (4)$$

L'élimination de α entre les équations (3) et (4) donne l'équation de la surface des développoïdes qui correspondent à l'angle ω.

Si l'on veut discuter la courbe qui résulte de l'intersection de deux cônes droits consécutifs, on pourra supposer dans les équations (3) et (4) :

$$\alpha=0, \qquad \varphi\alpha=0, \qquad \varphi'\alpha=0,$$

ce qui revient à placer le sommet du premier cône à l'origine des coordonnées, et l'axe de ce cône, ou la tangente à la courbe au point (α, $\varphi\alpha$) sur l'axe des x. Cette hypothèse réduit ces équations (3) et (4) aux suivantes :

$$\left\{\begin{array}{l}x^2\sin^2\omega=\cos^2\omega\,(y^2+z^2),\\ y\varphi''\alpha=\sin^2\omega,\end{array}\right\}$$

ou

$$\left\{\begin{array}{l}x^2\sin^2\omega=\cos^2\omega\left(z^2+\dfrac{\sin^4\omega}{\varphi''^2\alpha}\right),\\ y\varphi''\alpha=\sin^2\omega;\end{array}\right\}$$

d'où il suit que deux cônes consécutifs se coupent suivant une hyperbole dont le plan est perpendiculaire au plan de la courbe donnée, et parallèle à la tangente de cette courbe, qui sert d'axe au premier cône. Les demi-axes de cet hyperbole sont :

$$\frac{\sin^2\omega}{\varphi''\alpha} \quad \text{et} \quad \frac{\sin\omega\cos\omega}{\varphi''\alpha},$$

$\varphi''\alpha$ étant la valeur de cette fonction qui correspond à $\alpha=0$.

Pour appliquer les équations (3) et (4) au cas particulier du cercle, supposons que ce cercle ait pour équation :

$$x^2+y^2=\rho^2,$$

ce qui donne :

$$\varphi\alpha=\sqrt{1-\alpha^2},\qquad \varphi'\alpha=-\frac{\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (3), elle devient :

$$(x\sqrt{\rho^2-\alpha^2}-\alpha y)^2=\rho^2\cos^2\omega\{(x-\alpha)^2+(y-\sqrt{\rho^2-\alpha^2})^2+z^2\};\quad(5)$$

la différentiant par rapport à α, seulement :

$$(x\sqrt{\rho^2-\alpha^2}-\alpha y)\,(\alpha x+y\sqrt{\rho^2-\alpha^2}-\rho^2\cos^2\omega)=0.$$

Des deux facteurs qui forment cette équation, le premier égalé à zéro exprimerait que le cercle donné se réduit au point $x=\alpha$, $y=\varphi\alpha$, $z=0$. Le second facteur égalé à zéro appartient à la surface des développoïdes du cercle qui correspondent à l'angle ω. On a donc pour cette surface :

$$\alpha x+y\sqrt{\rho^2-\alpha^2}-\rho^2\cos^2\omega=0.\qquad(6)$$

Développant l'équation (5), on a :

$$\begin{aligned}&\rho^2x^2-\alpha^2x^2-2\alpha xy\sqrt{\rho^2-\alpha^2}+\alpha^2y^2\\&=\rho^2\cos^2\omega\{x^2+y^2+z^2+\rho^2-2\alpha x-2y\sqrt{\rho^2-\alpha^2}\}.\end{aligned}\qquad(5)$$

L'équation (6) donne :

$$\begin{aligned}&-2\alpha x-2y\sqrt{\rho^2-\alpha^2}=-2\rho^2\cos^2\omega\\&\alpha^2x^2+2\alpha xy\sqrt{\rho^2-\alpha^2}=\rho^4\cos^4\omega-y^2(\rho^2-\alpha^2).\end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (5) ; elle devient :

$$(x^2+y^2)\sin^2\omega=\cos^2\omega(z^2+\rho^2)-\rho^2\cos^4\omega,\qquad(5)$$

ou

$$(x^2+y^2)\,\mathrm{tang}^2\omega=z^2+\rho^2\sin^2\omega.\qquad(5)$$

Cette équation appartient à un hyperboloïde de révolution, engendré par une droite faisant un angle ω avec le plan des xy, et distante de l'axe des z d'une quantité $\rho\cos\omega$, rayon du plus petit cercle de la surface, concentrique au cercle donné $x^2+y^2=\rho^2$.

(*Fin de l'extrait du Mémoire de M. Lancret.*)

En recherchant ce que devient dans la géométrie aux trois dimensions, la propriété des développoïdes, analogue a celle que Réaumur a démontrée pour les courbes planes, on trouvera le théorême suivant:

« Si par une droite tangente à une surface, on conçoit toutes « les sections dont les plans passent par cette tangente, le lieu des « extrémités de tous les rayons de *développoïdes*, qui correspondent « dans chaque section au point de contact de la droite et de la sur- « face, est une sphère, et le diamètre de cette sphère, est égal au « rayon du cercle osculateur de la section normale, dont le plan « passe par la tangente à la surface ».

Démonstration. D'après Réaumur, la circonférence qui a pour diamètre, le rayon du cercle osculateur d'une courbe plane, est le lieu des extrémités des rayons de développoïdes, correspondans au point de contact de la courbe et du cercle; or, tous les cercles osculateurs des sections planes d'une surface passant par une tangente à cette surface, appartiennent à la sphère dont le grand cercle est osculateur de la section normale menée par la tangente, (*voyez* page 138, équat. 8). Donc, etc.

Sur la ligne la plus courte entre deux points d'une surface.

Si par chacun des points de cette ligne, on conçoit le plan tangent à la surface, ce plan engendre une surface développable, circonscrite à la surface proposée, et en la développant, la ligne la plus courte devient évidemment une ligne droite sur le développement. C'est par cette raison que dans un Mémoire sur les courbes à double courbure (26 avril 1802, tom. Ier. des Savans étrangers de l'Institut, année 1805), M Lancret nomme cette surface développable, surface *rectifiante* de la ligne la plus courte. Il suppose dans ce Mémoire que les plans osculateurs de la ligne la plus courte d'une surface, sont perpendiculaires aux plans tangens de cette surface. Il suit évidemment de cette hypothèse, qu'en menant par les tangentes d'une courbe donnée, une suite de plans perpendiculaires aux plans osculateurs de la courbe, les intersections successives de ces plans, forment la surface *rectifiante* de la courbe proposée.

On démontre par la synthèse, dans le Dictionnaire de l'Encyclopédie, à l'article *Courbe à double courbure*, cette proposition : « les plans osculateurs de la ligne la plus courte d'une surface sont perpendiculaires aux plans tangens de cette surface », la proposition est vraie, mais la démonstration n'est pas satisfaisante.

Sur une sphère, dit-on, la ligne la plus courte est un grand cercle, dont le plan est perpendiculaire au plan tangent; or, tout élément de surface infiniment petit se confond avec la surface d'une sphère: donc, etc. On sait qu'une sphère ne peut avoir de contact du second ordre que suivant une ligne déterminée de cette surface; on ne peut donc pas supposer que les élémens de la sphère et de la surface se confondent.

J'ai cherché une autre démonstration synthétique, fondée sur le mode de génération de la ligne la plus courte entre deux points d'une surface développable. Désignons, pour abréger, cette surface par la lettre S. Menons-lui un plan tangent, et tirons dans ce plan une droite quelconque D; supposons que ce plan se meuve en touchant continuellement la surface S. Dans ce mouvement la droite D prolongée indéfiniment dans toutes ses positions, engendre une autre surface développable S', dont l'arête de rebroussement est formée par les points de contact de la droite mobile D et de la surface S. Il est évident que cette arête de rebroussement a pour surface rectifiante la surface développable S, et qu'elle est la ligne la plus courte entre deux points quelconques de cette surface; il s'agit de démontrer que les plans osculateurs de cette ligne sont perpendiculaires aux plans tangens de la surface développable S. En effet, lorsque la droite D passe d'une position à la position infiniment voisine, elle engendre une portion de cône droit, dont l'axe est une droite de la surface S; or, le plan tangent à cette surface passe par cette droite: donc il est perpendiculaire à ce petit cône droit, engendré par la droite D; mais ce petit cône est touché par le plan osculateur de l'arête de rebroussement, ou de la ligne la plus courte, puisque ce plan passe par deux tangentes infiniment voisines de cette ligne, qui sont en même tems des arêtes du petit cône: donc le plan tangent de la surface S est perpendiculaire à ce même plan osculateur.

Il est donc démontré que la ligne la plus courte d'une surface développable, a des plans osculateurs perpendiculaires aux plans tangens de cette surface. Considérons maintenant une surface quelconque, et sa ligne la plus courte entre deux de ses points. Cette ligne sera aussi la plus courte sur la surface développable passant par cette ligne, et circonscrite à la surface proposée. Donc les plans osculateurs de la ligne la plus courte entre deux points d'une surface quelconque, sont perpendiculaires aux plans tangens de cette surface.

Il est à remarquer que deux surfaces développables, dont la première a pour arête de rebroussement, une des lignes les plus courtes entre deux points de la seconde, se coupent à angle droit dans tous les points de la ligne qui leur est commune. H. C.

Démonstration d'un théorême de Géométrie analytique; par M. Monge.

Le théorême qu'on a démontré, page 136, « Une normale quelconque d'une surface, n'est rencontrée que par deux autres normales qui en soient infiniment voisines », est une conséquence d'une proposition plus générale que M. Monge a donnée dans les Mémoires de l'académie de Paris, année 1781. Voici comme il l'énonce : « Si par tous les points d'un plan, ou d'une surface courbe, « dont la forme et la position sont données, on conçoit des droites « menées dans l'espace, suivant une loi quelconque; de toutes celles « qui l'environnent, et qui en sont infiniment proches, il n'y en a « généralement que deux qui la coupent, et qui, par conséquent, « soient dans le même plan avec elle ».

« On suppose dans cet énoncé que, pour chaque point de la sur- « face, la loi ne donne qu'une droite, ou que si elle en donne « plusieurs, on ne considère que la suite de celles qui sont données « par la même solution ».

Pour démontrer cette proposition, prenons un point (x, y, z) sur la surface $dz = pdx + qdy$; et menons par ce point une droite dont les équations soient :

$$(1)\quad x' - x = L(z' - z), \qquad (2)\quad y' - y = M(z' - z);$$

x', y', z' sont les coordonnées d'un point quelconque de la droite, et L, M des fonctions connues des coordonnées x, y du point de la surface; ensorte qu'on ait :

$$dL = ldx + l'dy, \quad \text{et} \quad dM = mdx + m'dy,$$

l, l', m, m' étant des fonctions quelconques, mais déterminées en x et y.

Lorsque la droite des équations (1) et (2) passera du point (x, y, z) de la surface au point $(x + dx, y + dy, z + dz)$ de cette même surface; on exprimera que la seconde droite correspondant à cette nouvelle position, rencontre la première, en différentiant les équations (1) et (2), et en regardant les coordonnées x', y', z' comme constantes.

Les équations différentielles qu'on obtient, sont :

$$-dx = (z' - z)dL + Ldz, \quad -dy = (z' - z)dM + Mdz.$$

Éliminant $(z' - z)$, on a :

$$dM\,(Ldz + dx) = dL\,(Mdz + dy),$$

ou :

$$dz\,(LdM - MdL) + dxdM - dydL = 0.$$

Substituant dans cette équation, pour dz, dL, dM leurs valeurs en dx et dy, elle devient :

$$\left\{\begin{array}{l}(pdx + qdy)\,\{L\,(mdx + m'dy) - M\,(ldx + l'dy\} \\ + dx\,(mdx + m'dy) - dy\,(ldx + l'dy = 0,\end{array}\right.$$

ou :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dy^2}{dx^2}\,(q(Lm'-Ml')-l') + \frac{dy}{dx}(L(pm'+qm)-M(pl'+ql)+m'-l) \\ \quad + p\,(Lm - Ml) + m = 0.\end{array}\right\}(3)$$

Cette équation étant du second degré en $\frac{dy}{dx}$, on voit qu'il n'y a que deux directions sur la surface, pour passer de la droite des équations (1) et (2), à une droite infiniment voisine, qui la rencontre.

Si l'on suppose dans l'équation (3) que les quantités p et q sont constantes, toutes les droites représentées par les équations (1) et (2) aboutiront à un plan. Lorsque ce plan se confond avec celui des xy, on a $p = 0$, $q = 0$, et l'équation (3) se réduit à :

$$\frac{dy^2}{dx^2}\,l' + \frac{dy}{dx}\,(l - m') - m = 0.$$

Il résulte de la proposition de M. Monge, que les rayons de lumière qui partent d'un corps lumineux quelconque, et qui subissent un nombre quelconque de réflexions et de réfractions sur des surfaces polies ou transparentes, forment dans l'espace des séries de surfaces developpables, dont les arêtes de rebroussement déterminent *les caustiques* de réflexion et de réfraction. On voit de très-belles applications de ce principe, dans le traité d'optique de Malus, qui précède son Mémoire sur la théorie de la double réfraction de la lumière dans les substances cristallisées. (*Voyez* les Mémoires présentés à l'Institut, tome II, janvier 1811.)

H. C.

Extrait d'un Mémoire sur les surfaces élastiques ; par M. Poisson (*).

(Lu à l'Institut, le 1er. août 1814.)

Ce Mémoire est divisé en deux parties. La première est relative aux surfaces flexibles et non élastiques, dont M. Lagrange a déja donné l'équation d'équilibre, dans la nouvelle édition de la *Mécanique analytique*, tom. Ier., page 149. Je parviens à la même équation par un moyen différent, qui a l'avantage de montrer à quelle restriction particulière elle est subordonnée. Elle suppose, en effet, chaque élément de la surface également tendu en tous sens ; condition qui n'est pas remplie dans un grand nombre de cas, et qui serait, par exemple, impossible dans le cas d'une surface pesante et inégalement épaisse. Pour résoudre complètement la question, il a fallu avoir égard à la différence des tensions qu'éprouve un même élément dans deux sens différens ; on trouve alors des équations d'équilibre qui comprennent celles de la mécanique analytique, mais qui sont beaucoup plus générales, et aussi plus compliquées.

La surface flexible présente, dans un cas particulier, un résultat digne d'être remarqué. Si l'on suppose tous ces points pressés par un fluide pesant, on obtient pour son équation celle que M. Laplace a trouvée pour la surface capillaire, concave ou convexe ; d'où il résulte que quand un liquide s'élève ou s'abaisse dans un tube capillaire, il prend la même forme qu'un linge flexible et imperméable qui serait rempli d'un fluide pesant.

Après avoir trouvé l'équation d'équilibre d'une surface flexible dont tous les points sont tirés ou poussés par des forces quelconques, il ne reste plus, pour en conclure l'équation de la surface élastique, qu'à comprendre au nombre de ces forces celles qui proviennent de l'élasticité : la détermination de cette espèce particulière de forces fait l'objet de la seconde partie de mon Mémoire, et voici sur quel principe elle est fondée.

Quelle que soit la cause de l'élasticité des corps, il est certain qu'elle consiste en une tendance de leurs molécules à se repousser

(1) La classe des Sciences physiques et mathématiques de l'Institut, a remis au concours pour l'année 1815, la théorie des oscillations des lames élastiques. Cet extrait du Mémoire de M. Poisson, sur les surfaces élastiques, sera très-utile aux jeunes géomètres qui concourent pour le prix ; c'est ce motif qui m'a déterminé à l'insérer dans notre Correspondance, quoiqu'il ait déja paru dans un Bulletin de la société philomatique. — Le Mémoire entier paraîtra dans le volume de l'Institut, année 1812, 2e. partie. H. C.

mutuellement, et qu'on peut l'attribuer à une force répulsive qui s'exerce entre elles suivant une certaine fonction de leurs distances. D'ailleurs il est naturel de penser que cette force, ainsi que toutes les autres actions moléculaires, n'est sensible que jusqu'à des distances imperceptibles; la fonction qui en exprime la loi doit donc être regardée comme nulle dès que la variable qui représente la distance n'est plus extrêmement petite: or on sait que de semblables fonctions disparaissent en général dans le calcul, et ne laissent dans les résultats définitifs que des intégrales totales ou des constantes arbitraires qui sont des données de l'observation. C'est, en effet, ce qui arrive dans la théorie des réfractions, et mieux encore dans la théorie de l'action capillaire, l'une des plus belles applications de l'analyse à la physique qui soient dues aux géomètres. Il en est de même dans la question présente, et c'est ce qui a permis d'exprimer les forces qui proviennent de l'élasticité de la surface en quantités dépendantes uniquement de sa figure, telles que ses rayons de courbure principaux et leurs différences partielles. Substituant donc ces expressions à la place des forces, dans les équations générales de l'équilibre des surfaces, données dans la première partie du Mémoire, on parvient enfin à l'équation de la surface élastique qu'il s'agissait de trouver. Il serait impossible de donner dans cet extrait le détail des calculs qui conduisent à cette équation; nous nous contenterons donc de la faire connaître, en renvoyant, pour sa démonstration, au Mémoire même.

Soient x, y, z les coordonnées d'un point quelconque de la surface, point que nous appellerons m; considérons z comme fonction de x et y, et faisons, pour abréger:

$$\frac{dz}{dx}=p, \quad \frac{dz}{dy}=q, \quad \sqrt{1+p^2+q^2}=k.$$

Soient aussi ρ et ρ' les deux rayons de courbure principaux de cette surface, qui répondent au point m; désignons par P et Q deux fonctions de ces rayons, savoir:

$$P=\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}, \qquad Q=\frac{1}{\rho\rho'};$$

de sorte que l'on ait, d'après les formules connues:

$$P=\frac{1+q^2}{k^3}\cdot\frac{d^2z}{dx^2}-\frac{2pq}{k^3}\cdot\frac{d^2z}{dxdy}+\frac{1+p^2}{k^3}\cdot\frac{d^2z}{dy^2},$$

$$Q=\frac{1}{k^4}\cdot\left(\frac{d^2z}{dx^2}\cdot\frac{d^2z}{dy^2}-\left(\frac{d^2z}{dxdy}\right)^2\right).$$

Représentons par X, Y, Z les forces données qui agissent sur le point quelconque m, parallèlement aux axes des x, y, z ; supposons ces forces telles que la formule $Xdx + Ydy + Zdz$ soit la différentielle exacte d'une fonction de x, y, z, et désignons son intégrale par Π. Enfin, supposons la surface élastique également épaisse dans toute son étendue, et soit ε son épaisseur constante; son équation d'équilibre sera :

$$n^2\varepsilon^2\left[\frac{1+q^2}{k}\cdot\frac{d^2P}{dx^2}-\frac{2pq}{k}\cdot\frac{d^2P}{dxdy}+\frac{1+p^2}{k}\cdot\frac{d^2P}{dy^2}-pP\frac{dP}{dx}-qP\frac{dP}{dy}\right.$$
$$\left.+\frac{kP}{2}(P^2-4Q)\right]=Z-pX-qY-kP\Pi. \qquad (a.$$

Le coefficient n représente ici une constante qui dépend de l'élasticité naturelle de la surface ; il est nul dans le cas des surfaces flexibles et non élastiques, ce qui réduit leur équation d'équilibre à

$$Z-pX-qY-kP\Pi=0\,;$$

résultat qui coïncide avec celui de la mécanique analytique que j'ai cité plus haut.

Non-seulement l'équation (a) suppose l'épaisseur constante ; mais elle ne convient aussi qu'à une surface élastique naturellement plane, et elle ne comprend pas les surfaces, telles que les cloches et autres, dont la figure naturelle est courbe. Si l'on y supprime tout ce qui est relatif à l'une des deux coordonnées x et y, par exemple à y, la surface se changera en un cylindre parallèle à l'axe des x, et l'équation (a) devra alors coïncider avec l'équation ordinaire de la lame élastique; c'est, en effet, ce qu'il est aisé de vérifier après quelques transformations faciles à imaginer.

J'ai donné, à la fin de ce Mémoire, la démonstration d'une propriété de la surface élastique, analogue à celle de la lame que Daniel Bernouilli a fait connaître. Suivant ce géomètre, si l'on désigne par ds l'élément de la courbe élastique, et par ρ son rayon de courbure, l'intégrale $\int\frac{ds}{\rho^2}$ prise dans toute son étendue, est un *minimum*, entre toutes les courbes de même longueur. Cette propriété suppose que l'on fait abstraction de la pesanteur et de toute autre force donnée ; or, dans la même hypothèse, on trouve relativement à la surface élastique, que l'intégrale double :

$$\iint\left(\frac{1}{\rho}+\frac{1}{\rho'}\right)^2 k\,dxdy,$$

est pareillement un *minimum* ; ρ, ρ' et k représentant les mêmes quantités que ci-dessus, et l'intégrale devant s'étendre à la surface entière. J'ai aussi remarqué que la variation de l'intégrale :

$$\iint \frac{k\,dx\,dy}{\rho\rho'},$$

ne renferme que des termes relatifs aux limites ; d'où il suit que la même propriété du *minimum* a également lieu pour toute intégrale formée de la précédente, augmentée ou diminuée d'un multiple quelconque de cette dernière.

La recherche des équations d'équilibre des surfaces élastiques appartient à la mécanique générale ; c'est uniquement sous ce rapport que je l'ai considérée dans ce Mémoire ; mais cette théorie comprend comme application une des branches les plus étendues et les plus curieuses de l'acoustique. Je veux parler des lois que suivent les vibrations des plaques élastiques, des figures qu'elles présentent, et des sons qu'elles font entendre pendant leur mouvement. En effet, l'équation fondamentale qui doit servir à déterminer les petites oscillations d'une plaque sonore, se déduit de son équation d'équilibre, par les principes ordinaires de la mécanique. Supposons donc que la plaque s'écarte très-peu d'un plan fixe qui sera celui de x, y, et négligeons, en conséquence, toutes les quantités de seconde dimension, par rapport à z et à ses différences partielles : l'équation (a) se réduira d'abord à

$$Z - pX - qY = \Pi\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right) + n^2\varepsilon^2\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right).$$

De plus, faisons abstraction du poids de la plaque, et supposons, comme dans les problêmes des cordes et des lames vibrantes, que chaque point de la plaque reste, pendant le mouvement, dans une même perpendiculaire au plan fixe ; t étant la variable qui représente le tems, il faudra faire alors

$$X = 0, \qquad Y = 0, \qquad Z = -\varepsilon\frac{d^2z}{dt^2};$$

l'intégrale Π se réduira à une constante arbitraire, que j'appelerai c ; et l'équation du mouvement sera enfin

$$\varepsilon\frac{d^2z}{dt^2} + c\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right) + n^2\varepsilon^2\left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right) = 0.$$

J'ai démontré, dans mon Mémoire, que cette constante c dépend des forces qui tirent la surface à ses extrémités, et qui pro-

duisent ce qu'on appelle la tension. Elle est nulle quand ces forces n'existent pas ; ce qui réduit notre équation à

$$\frac{d^2z}{dt^2} + n^2 \left(\frac{d^4z}{dx^4} + 2\,\frac{d^4z}{dx^2dy^2} + \frac{d^4z}{dy^4}\right) = 0. \qquad (b)$$

Mais si l'on voulait considérer les surfaces tendues, telles que les tambours, par exemple, il faudrait, au contraire, conserver la constante c, et supposer $n = 0$; ce qui donne, en changeant le signe de c :

$$\frac{d^2z}{dt^2} = c\left(\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2}\right);$$

équation déja trouvée par Euler, et qui est aussi celle dont MM. Biot et Brisson se sont servis pour déterminer quelques propriétes des vibrations des surfaces tendues.

Il y a environ cinq ans, la première classe de l'Institut a proposé, comme sujet de prix, la théorie mathématique des vibrations des plaques sonores, vérifiée par la comparaison avec l'expérience ; mais, depuis cette époque, on n'a reçu qu'une seule pièce digne de l'attention de la classe. Au commencement de ce Mémoire, l'auteur anonyme pose, sans preuve suffisante, ou même tout-à-fait sans démonstration, une équation qui est précisément notre équation (b). Il y satisfait par des intégrales particulières, composées d'exponentielles, de sinus et de cosinus ; et en cela il suit l'exemple qu'Euler a donné en plusieurs endroits, relativement à l'équation des lames vibrantes. A chacune de ces intégrales, répond une figure particulière de la plaque sonore, et le son qu'elle rend dépend en général du nombre de lignes nodales qui se forment pendant ses vibrations. L'auteur calcule le ton relatif à chaque figure, puis il compare le ton calculé à celui que donne l'expérience pour une figure semblable : il trouve un accord satisfaisant entre ces deux résultats ; de sorte que l'équation des plaques vibrantes, quoiqu'elle ne fût pas jusqu'ici démontrée *à priori*, était du moins suffisamment justifiée par l'expérience. Cette comparaison est la partie de son travail qui a motivé la mention honorable de la classe : elle porte sur un grand nombre des expériences de M. Chladni, et sur beaucoup d'autres qui sont propres à l'ingénieux auteur du Mémoire dont nous parlons. Il y aurait une autre espèce de comparaison bien plus difficile à entreprendre, qui serait relative à la figure produite d'après une manière donnée de mettre la plaque en vibration. On pourrait aussi desirer que les résultats du calcul fussent déduits de l'intégrale générale, et non pas de quelques intégrales particulières de l'équation (b). Malheureusement cette équa-

tion ne peut s'intégrer sous forme finie que par des intégrales définies qui contiennent des imaginaires sous les fonctions arbitraires ; et si on les fait disparaître, ainsi que M. Plana y est parvenu dans un cas pareil (celui des lames vibrantes), on tombe sur une équation si compliquée, qu'il paraît très-difficile d'en faire aucun usage.

Pour indiquer ici tout ce qui a été fait jusqu'à présent sur les surfaces élastiques, je dois aussi faire mention d'un Mémoire sur les vibrations des plaques sonores, qui se trouve dans le volume de Pétersbourg pour l'année 1787. En partant d'une hypothèse trop précaire, l'auteur est conduit à une équation différentielle, qui n'est point exacte, et qui revient à l'équation (b), en y supprimant le terme multiplié par $\frac{d^4z}{dx^2dy^2}$. Il y satisfait aussi par des intégrales particulières, composées d'exponentielles, de sinus et de cosinus ; mais il remarque lui-même que les conclusions qui s'en déduisent ne sont pas d'accord avec les expériences de M. Chladni ; et maintenant, que nous connaissons la véritable équation du mouvement des plaques, nous voyons clairement la cause de cette discordance.

De la manière d'employer le principe de la moindre action, pour obtenir les équations du mouvement, rapportées aux variables indépendantes ; par M. Rodrigues, *licencié ès-sciences.*

On sait que le principe de la moindre action se réduit proprement à ce que *dans un système de corps soumis à des forces attractives ou répulsives, dans lequel, généralement, le principe des forces vives a lieu, la somme des forces vives instantanées acquises par tous les corps en passant d'une position donnée à une autre position aussi donnée*, *soit un* maximum *ou un* minimum.

Ce principe combiné avec celui des forces vives, peut servir à trouver les équations du mouvement du système dans chaque cas particulier ; mais on n'avait pas encore pensé, ce me semble, à employer dans ces solutions l'équation que donne le principe des forces vives, purement et simplement comme une équation de condition, et à la traiter comme telle par la méthode des multiplicateurs. Je suis parvenu ainsi, et en employant immédiatement les variables indépendantes du système, quelles qu'elles puissent être, aux équations générales du mouvement données dans *la Mécanique analytique*, (2e. *part.*, *sect.* 4), et auxquelles M. La-

grange est arrivé, soit par des transformations directes de coordonnées, soit en employant pour ces transformations, des formules générales déduites du calcul des variations.

La méthode que j'expose offre un exemple assez remarquable de la théorie des multiplicateurs dans la méthode de *maximis* et *minimis*, et de la manière de déterminer entièrement ces multiplicateurs par les équations aux limites. Elle a aussi l'avantage d'introduire immédiatement dans le calcul, les deux fonctions T et V qui représentent, l'une la demi-somme des forces vives du système, et l'autre l'intégrale de la somme des momens.

Cette fonction T, quelles que soient les variables qu'on emploie, est toujours une fonction homogène du second degré par rapport à leurs dérivées, en sorte que ξ, φ, ψ, etc. étant ces variables, ξ', φ', ψ' leurs dérivées, on aura l'équation identique :

$$2T = \frac{dT}{d\xi'}\xi' + \frac{dT}{d\psi'}\psi' + \frac{dT}{d\varphi'}\varphi'.$$

Cela posé, le principe de la moindre action exige que l'intégrale $\int T dt$, soit un *maximum* ou un *minimum*, pourvu qu'on regarde la première et la dernière position du système comme données; en sorte que les variations des coordonnées soient nulles aux deux limites de cette intégrale. La variation $\delta \int T dt$, ou $\int \delta . T dt$ doit donc être égale à zéro. Mais le principe des forces vives donne l'équation de condition $T + V = H$, H étant une constante arbitraire.

Suivant l'esprit de la méthode des variations, il faut ajouter à l'intégrale $\int \delta . T dt$, celle-ci $\int \lambda dt\,(\delta T + \delta V)$, λ étant un multiplicateur variable et indéterminé, et regarder ensuite les variations comme indépendantes de l'équation de condition.

Alors l'équation du *minimum* est :

$$\int \delta . T dt + \lambda dt\,(\delta T + \delta V) = 0.$$

Il est nécessaire de faire varier aussi le tems; car, les coordonnées seulement ont des variations déterminées aux limites, tandis que celles du tems restent tout-à-fait arbitraires. Mais on peut d'abord ne pas le faire varier, ayant soin de substituer ensuite, au lieu des variations $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$, les expressions :

$$\delta\xi - \xi'\delta t, \quad \delta\psi - \psi'\delta t, \quad \delta\varphi - \varphi'\delta t,$$

et d'ajouter à la partie hors du signe, le terme $T\delta t$ (*).

(*) Voyez le supplément aux *Leçons sur le calcul des fonctions*. (22me. Leçon.)

Nous aurons donc ainsi :

$$o = \int dt((\lambda + 1)\delta T + \lambda \delta V);$$

or,

$$\delta V = \frac{dV}{d\xi}\delta\xi + \frac{dV}{d\psi}\delta\psi + \frac{dV}{d\varphi}\delta\varphi,$$

$$\delta T = \frac{dT}{d\xi}\delta\xi + \frac{dT}{d\xi'}\frac{d\delta\xi}{dt} + \frac{dT}{d\varphi}\delta\varphi + \frac{dT}{d\varphi'}\frac{d\delta\varphi}{dt} + \frac{dT}{d\psi}\delta\psi + \frac{dT}{d\psi'}\frac{d\delta\psi}{dt}.$$

Faisant disparaître par l'intégration, par partie, les doubles signes $d\delta$, et ayant égard maintenant à la variation du tems, on aura cette transformée :

$$o = U + \int \{ \Xi(\delta\xi - \xi'\delta t) + \Psi(\delta\psi - \psi'\delta t + \Phi(\delta\varphi - \varphi'\delta t)\} dt;$$

dans laquelle :

$$U = T\delta t + (\lambda + 1)\left(\frac{dT}{d\xi'}(\delta\xi - \xi'\delta t) + \text{etc...}\right);$$

ou bien : $$U = \frac{dT}{d\xi'}\delta\xi + \frac{dT}{d\psi'}\delta\psi + \frac{dT}{d\varphi'}\delta\varphi - (2\lambda + 1)T\delta t,$$

$$\Xi = \frac{\lambda . dV}{d\xi} + (\lambda + 1)\frac{dT}{d\xi} - \frac{d.(\lambda + 1)\frac{dT}{d\xi'}}{dt}.$$

etc....

On aura donc les équations indéfinies $\Xi = o$, $\Psi = o$, $\Phi = o$; auxquelles on joindra l'équation $T + V = H$, afin d'éliminer λ; et l'équation aux limites $U_2 - U_1 = o$; mais aux limites, les variations $\delta\xi$, $\delta\psi$, $\delta\varphi$ sont nulles; l'équation se réduit donc à

$$(2\lambda + 1)_1 \delta t_1 - (2\lambda + 1)_2 \delta t_2 = o.$$

Et comme les variations δt_1, δt_2 sont indépendantes, on aura les équations :

$$(2\lambda + 1)_1 = o, \quad (2\lambda + 1)_2 = o,$$

auxquelles la valeur de λ devra satisfaire. Maintenant si l'on multiplie les équations $\Xi = o$, $\Psi = o$, $\Phi = o$, par $d\xi$, $d\psi$, $d\varphi$, etc., qu'on les ajoute, on trouvera, toutes réductions faites, et en observant que

$$dT + dV = o,$$

$$(2\lambda + 1)dT + Td(2\lambda + 1) = o.$$

On tire de cette équation $2\lambda + 1 = \frac{K}{T}$, K étant une constante

arbitraire ; on voit que pour satisfaire aux équations aux limites, il faudra faire $K=0$. On a donc simplement $2\lambda+1=0$, $\lambda=-\frac{1}{2}$. Substituant cette valeur dans les équations du mouvement, on aura les équations suivantes :

$$d.\frac{dT}{d\xi'}-\frac{dT}{d\xi}dt+\frac{dV}{d\xi}dt=0,$$

$$d.\frac{dT}{d\psi'}-\frac{dT}{d\psi}dt+\frac{dV}{d\psi}dt=0,$$

etc....

qui sont, comme on voit, celles de la *Mécanique analytique*.

Si les variables n'étaient pas indépendantes, et qu'il y eût par conséquent entre elles des équations de condition $M=0$, $N=0$, etc., il est évident que les précédentes seraient respectivement augmentées des termes $\mu\frac{dM}{d\xi}dt$, $\nu\frac{dN}{d\xi}dt$, etc., μ, ν, etc. étant des coefficiens indéterminés.

Recherches sur la théorie analytique des lignes et des rayons de courbure des surfaces, et sur la transformation d'une classe d'intégrales doubles, qui ont un rapport direct avec les formules de cette théorie ; par M. RODRIGUES.

I.

Équations des lignes de courbure.

On appelle *ligne de courbure* sur une surface, une ligne telle que les normales à la surface menées par deux de ses points consécutifs, se coupent. Le point d'intersection est le centre de courbure, et la distance de ce point à la surface, le rayon de courbure.

Cela posé, soit ds un arc infiniment petit de cette ligne de courbure, dx, dy, dz seront les projections de cet élément sur les axes des coordonnées. Considérons les normales à la surface menées aux deux extrémités de l'arc ds ; appelons X, Y, Z, les cosinus des angles que la première normale fait avec les coordonnées ; $X+dX$, $Y+dY$, $Z+dZ$ seront les cosinus des angles formés par la seconde normale. Ces deux droites devant se rencontrer, si de leur point de rencontre comme centre et d'un rayon égal à l'unité, nous décrivons entre ces droites un petit arc de

cercle, il sera la mesure de l'angle qu'elles comprennent, et il est facile de voir que les projections de cet arc seront respectivement dX, dY, dZ. On voit aussi que ces projections seront à celles de l'élément ds, dans le rapport de l'unité au rayon de courbure. Désignons ce rayon par R, et nous aurons les trois équations suivantes, qui serviront à déterminer à-la-fois le rayon de courbure, et la ligne de courbure :

$$\frac{dX}{dx}=\frac{1}{R}, \quad \frac{dY}{dy}=\frac{1}{R}, \quad \frac{dZ}{dz}=\frac{1}{R}. \qquad (1)$$

Les deux équations de la ligne de courbure seront :

$$dXdy-dYdx=0, \qquad dXdz-dZdx=0;$$

entre les cosinus X, Y, Z, on a la relation :

$$X^2+Y^2+Z^2=1,$$

et par suite :

$$XdX+YdY+ZdZ=0.$$

Cette dernière équation combinée avec les deux ci-dessus, sert à éliminer dX, dY, dZ, et l'on arrive à l'équation :

$$Xdx+Ydy+Zdz=0.$$

Cette équation appartient à la surface que l'on considère ; il suffit donc pour la connaissance de la ligne de courbure, d'avoir égard à l'une de ses deux équations ; prenons l'équation :

$$dXdy-dYdx=0,$$

on a:

$$dX=\left(\frac{dX}{dx}\right)dx+\left(\frac{dX}{dy}\right)dy, \qquad dY=\left(\frac{dY}{dx}\right)dx+\left(\frac{dY}{dy}\right)dy;$$

l'équation définitive sera donc

$$\left(\frac{dX}{dy}\right)dy^2+\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)-\left(\frac{dY}{dy}\right)\right]dydx-\left(\frac{dY}{dx}\right)dx^2=0. \qquad (2)$$

Cette équation différentielle du premier ordre, montant au second degré, la constante introduite par l'intégration, entrera au même degré dans l'équation finie. Cette constante aura donc deux valeurs, lorsqu'on voudra la determiner par la condition que la courbe passe par un point donné. Il existe donc, en général, sur une surface deux lignes de courbure pour un point quelconque. Les valeurs de $\frac{dy}{dx}$ correspondantes à ces deux lignes sont les racines

de l'équation (2), résolue par rapport au coefficient différentiel. Il est même clair que ces valeurs sont liées par une équation du premier degré à celles de la constante arbitraire; d'où il résulte que si pour un point singulier, l'équation (2) devient identique, ou ce qui revient au même, si les racines de cette équation se présentent sous une forme indéterminée, il en sera de même pour les valeurs de la constante arbitraire, qui pourra dans ce cas avoir plus ou moins de deux valeurs réelles. Il peut donc y avoir plusieurs lignes de courbure pour cette classe de points singuliers, que M. Monge a considérés le premier, et qu'il a nommés *ombilics*. (Voyez l'analyse appliquée à la géométrie, page 127, édition 1809.) On peut en voir une théorie complette dans l'ouvrage de M. Dupin, *développemens de géométrie*.

II.

Je reviens maintenant à l'équation (2). Désignons, comme M. Monge, par p, q, r, s, t les cinq premiers coefficiens différentiels partiels de l'ordonnée z, on aura :

$$X = \frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad Y = \frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

puis

$$\left(\frac{dX}{dx}\right) = \frac{pqs-(1+q^2)r}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \left(\frac{dX}{dy}\right) = \frac{pqt-(1+p^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},$$

$$\left(\frac{dY}{dx}\right) = \frac{pqr-(1+p^2)s}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad \left(\frac{dY}{dy}\right) = \frac{pqs-(1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), on trouve :

$$[(1+q^2)s-pqt]dy^2+[(1+q^2)r-(1+p^2)t]dydx-(1+p^2)s+pqr=0. \quad (3)$$

Sous cette forme, notre équation coïncide avec celle que donne M. Monge dans l'*Analyse appliquée*, page 109.

Si l'on écrit ainsi cette équation :

$$Ady^2 + Bdydx - Cdx^2 = 0,$$

on aura entre A, B, C, la relation :

$$Ar = Bs + Ct. \quad (4)$$

M. Monge démontre que les deux lignes de courbure sont perpendiculaires, en rendant le plan tangent parallèle au plan des xy. On peut s'en dispenser de la manière suivante.

Soient y', y'' et z', z'' les deux valeurs de $\frac{dy}{dx}$, et de $\frac{dz}{dx}$ pour

les deux courbes ; la condition pour qu'elles soient perpendiculaires, est

$$1 + y'y'' + z'z'' = 0;$$

or, on a $z' = p + qy'$, $z'' = p + qy''$; l'équation devient :

$$1 + p^2 + (1 + q^2)y'y'' + pq(y' + y'') = 0;$$

or, on aura : $y'y'' = -\frac{C}{A}$, $y' + y'' = -\frac{B}{A}$,

et par suite : $A(1 + p^2) - pqB - C(1 + q^2) = 0$:

or $A = \frac{Bs + Ct}{r}$; on a donc :

$$(1 + p^2)(Bs + Ct) - pqrB - C(1 + q^2)r = 0,$$

ou bien : $B((1 + p^2)s - pqr) - C((1 + q^2)r - (1 + p^2)t) = 0$,

équation identique par les valeurs de B et de C.

III.

Formules qui établissent une correspondance très-simple entre les deux lignes de courbure.

Désignons par d les différentielles relatives à l'une des lignes de courbure, et par δ les différentielles relatives à l'autre ; en sorte que

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{\delta y}{\delta x};$$

L'équation $Ar = Bs + Ct$, donne :

$$r - s(y' + y'') + ty'y'' = 0,$$

ou substituant pour y', y'' les expressions ci-dessus :

$$r\delta x dx + s(dx\delta y + dy\delta x) + t\delta y dy = 0,$$

ou bien :

$$dx(r\delta x + s\delta y) + dy(s\delta x + t\delta y);$$

or, $\quad dp = rdx + sdy; \quad dq = sdx + tdy$:

donc cette équation se change en

$$dx\delta p + dy\delta q = 0, \qquad (5)$$

équation d'une simplicité remarquable, et qui, je crois, n'avait pas encore été donnée.

L'équation qui exprime la perpendicularité est :

$$1 + y'y'' + z'z'' = 0,$$

ou
$$dx\delta x + dy\delta y + dz\delta z = 0;$$

mais on a :
$$dz = pdx + qdy.$$

Substituant, on trouve :

$$dx(\delta x + p\delta z) + dy(\delta y + q\delta z) = 0.$$

Éliminant $\frac{dy}{dx}$ par l'équation (5), on a cette nouvelle équation des lignes de courbure, en changeant δ en d,

$$dp(dy + qdz) = dq(dx + pdz).$$

On trouve cette équation dans l'*Analyse appliquée*, page 115.

IV.

Si l'on compare l'équation :

$$r + s(y' + y'') + ty'y'' = 0,$$

à l'équation des tangentes conjuguées, donnée par M. Dupin, on les trouve identiques à la notation près ; il s'ensuit donc que les tangentes aux deux lignes de courbure, sont deux tangentes conjuguées. C'est en parlant de cette propriété que M. Dupin, après avoir donné l'équation des tangentes conjuguées, arrive à l'équation des lignes de courbure. L'équation (5) est celle des tangentes conjuguées ramenée à une forme plus simple, et telle qu'on peut la trouver ainsi qu'il suit. On sait que si l'on considère deux points infiniment voisins sur une surface, la tangente qui passe par ces deux points, et la ligne d'intersection des deux plans tangens, forment un système de tangentes conjuguées, d'après la définition de M. Dupin : or, soit

$$z' = px' + qy' + z - px - q;$$

l'équation du plan tangent, celle de l'intersection avec un plan infiniment voisin dans la direction $\frac{\delta y}{\delta x}$, sera :

$$(x' - x)\delta p + (y' - y)\delta q = 0.$$

Faisons

$$x' = x + dx, \qquad y' = y + dy,$$

les différentielles marquées par d, étant prises sur l'intersection des deux plans, et nous aurons la relation :

$$dx\delta p + dy\delta q = 0.$$

Si l'on met pour δp, δq les valeurs

$$\delta q = r\delta x + s\delta y,$$
$$\delta p = s\delta x + t\delta y,$$

on retrouve l'équation :

$$r + s\left(\frac{dy}{dx} + \frac{\delta y}{dx}\right) + t\frac{\delta y}{dx}.\frac{dy}{dx} = 0,$$

ou bien : $$r + s(y' + y'') + ty'y'' = 0.$$

V.

Formules relatives aux rayons de courbure.

L'équation $\frac{1}{R} = \frac{dX}{dx}$, développée devient :

$$\frac{1}{R} = \left(\frac{dX}{dx}\right) + \left(\frac{dX}{dy}\right)\frac{dy}{dx}.$$

Si l'on élimine $\frac{dy}{dx}$, entre cette équation et l'équation (2), on aura:

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dy}\right) - \left(\frac{dX}{dy}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right)\right]R^2 - R\left[\left(\frac{dX}{dx}\right) + \left(\frac{dY}{dy}\right)\right] + 1 = 0\,(*). \quad (6)$$

(*) Substituant dans l'équation (6) pour $\left(\frac{dX}{dx}\right)$, $\left(\frac{dX}{dy}\right)$, $\left(\frac{dY}{dx}\right)$, $\left(\frac{dY}{dy}\right)$ leurs valeurs ; et faisant pour abréger :

$$g = rt - s^2, \quad h = (1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t, \quad k^2 = 1 + p^2 + q^2,$$

elle devient : $$gR^2 + hkR + k^4 = 0.$$

Résolvant cette équation, on parvient à l'expression des deux rayons R et R', donnée par M. Monge, page 112 de son analyse,

$$R = \frac{k}{2g}\left(-h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2g}\right) = \frac{-2k^3}{h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2g}}.$$

Dans l'hypothèse de $p = 0$, $q = 0$, $g = rt - s^2$, $h = r + t$, $k = 1$, et la valeur de R devient, comme on l'a trouvé dans l'article précédent, page 135, $\frac{2}{r + t \pm \sqrt{4s^2 + (r+t)^2}}$. N'ayant eu pour objet dans cet article, que de démontrer les théorèmes relatifs à la courbure d'une surface ou d'une courbe, je n'avais employé que cette dernière expression, qui est un cas particulier de l'expression générale du rayon de la sphère osculatrice en un point déterminé de la surface $dz = pdx + qdy$. Cette expression, $R = \frac{-2k^3}{h \pm \sqrt{h^2 - 4k^2g}}$ donne la longueur du rayon de courbure, au point (x, y, z), quelques soient les plans rectangulaires auxquels on ait rapporté la surface. H. C.

Soient R, R', les deux racines de cette équation, on aura ces expressions très-symétriques :

$$\frac{1}{R}+\frac{1}{R'}=\left(\frac{dX}{dx}\right)+\left(\frac{dY}{dy}\right),$$

$$\frac{1}{RR'}=\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dy}\right)-\left(\frac{dX}{dy}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right).$$

VI.

Application des formules et des équations précédentes à la recherche des équations de plusieurs surfaces.

Nous allons montrer par plusieurs exemples, l'utilité des formules et des équations que nous avons établies ci-dessus, dans la solution de plusieurs problêmes de l'*Analyse appliquée* de M. Monge, relatifs à la courbure des surfaces.

Cherchons d'abord l'équation de la surface dans laquelle un des rayons serait infini, les équations :

$$\frac{1}{R}=\frac{dX}{dx},\quad \frac{1}{R}=\frac{dY}{dy},\quad \frac{1}{R}=\frac{dZ}{dz},$$

donneraient alors $dX=0$, $dY=0$, $dZ=0$. La troisième de ces équations est une conséquence des deux premières.

Les équations $dX=0$, $dY=0$, intégrées deviennent :

$$p=\alpha,\quad q=\beta.$$

Ce sont les équations de la ligne de courbure pour laquelle le rayon de courbure de la surface est infini. Elles marquent que pour tous les points de cette ligne de courbure, le plan tangent est le même, ce qui est le caractère distinctif des surfaces développables.

Les équations $p=\alpha$, $q=\beta$, différentiées donnent :

$$rdx+sdy=0,\quad sdx+tdy=0.$$

Eliminant $\frac{dy}{dx}$, entre ces deux équations, on aura un caractère indépendant de la direction particulière de la ligne de courbure. On trouve ainsi :

$$rt-s^2=0,$$

ce qui est l'équation des surfaces développables.

Des équations $p=\alpha$, $q=\beta$, on conclut :

$$dz=\alpha dx+\beta dy,$$

équation intégrable et qui donne :

$$z = \alpha x + \beta y + \gamma.$$

On voit donc que la ligne de courbure est plane. Pour une même ligne de courbure, α, β, γ sont constans ; on a donc, en général, $\beta = \varphi\alpha$, $\gamma = \psi\alpha$, ce qui donne les deux intégrales premières :

$$q = \varphi p, \quad z - px - qy = \psi p.$$

Nous renvoyons pour de plus longs détails à l'*Analyse appliquée.*

VII.

Si l'on demande la surface dont un des rayons de courbure serait donné et égal à a, son équation aux différences partielles du second ordre s'obtiendra en mettant a au lieu de R dans l'équation (6). Mais on aura immédiatement les deux intégrales premières de cette équation, par la considération des lignes de courbure. En effet, les équations (1) s'intègrent dans ce cas, et donnent :

$$x - aX = \alpha,$$
$$y - aY = \beta,$$
$$z - aZ = \gamma,$$

α, β, γ sont constans et variables en même tems, on a donc alors $\beta = \psi\gamma$, $\alpha = \varphi\gamma$, ou :

$$x - aX = \varphi(z - aZ), \quad y - aY = \psi(z - aZ).$$

Les trois équations ci-dessus combinées avec celle-ci :

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1,$$

donnent : $(x - \varphi\gamma)^2 + (y - \varphi\gamma)^2 + (z - \gamma)^2 = a^2$;

ce qui montre que la surface cherchée est l'enveloppe de l'espace parcouru par une sphère, dont le rayon serait constant et égal à a, et dont le centre décrirait une courbe arbitraire dans ses deux projections.

VIII.

Si une des lignes de courbure devait toujours être parallèle à un plan donné, dont l'équation fût par exemple $y = ax$, ce qui est toujours permis ; alors pour cette ligne on aurait les équations ;

$$dy - adx = 0,$$
$$dXdy - dYdx = 0,$$

qui s'intégreraient ainsi :

$$y - ax = \alpha,$$
$$Y - aX = \beta,$$

ce qui donnerait une des intégrales premières $y - aX = \varphi(y - ax)$; ensuite l'équation (5) :

$$dy\,\delta q + dx\,\delta p = 0.$$

s'intégrerait aussi, et l'on aurait pour la seconde ligne de courbure, l'équation :

$$p + aq = \gamma,$$

ou bien : $$X + aY + \gamma Z = 0.$$

Cette équation différentiée de nouveau donne :

$$dX + adY + \gamma dZ = 0.$$

On peut chasser dX, dY, dZ par les équations (1), et l'on trouve alors :

$$dx + ady + \gamma dz = 0;$$

intégrant $$x + ay + \gamma z = \theta,$$

équation d'un plan ; la seconde ligne de courbure est donc plane comme la première.

On aura : $$\theta = F(\gamma).$$

Substituant pour γ la valeur $p + aq$, on obtient cette seconde intégrale première :

$$x + pz + a(y + qz) = F(p + aq).$$

La recherche de l'intégrale finie, exige des développemens étrangers à mon sujet, et qui ne peuvent trouver place ici.

IX.

Une surface très-remarquable est celle dont les deux rayons de courbure sont égaux et de signe contraire, c'est-à-dire directement opposés. Pour une pareille surface, on doit avoir :

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = 0;$$

son équation aux différences partielles sera donc :

$$\left(\frac{dX}{dx}\right) + \left(\frac{dY}{dy}\right) = 0.$$

Sous cette forme, on reconnaît sur-le-champ que cette surface est celle dont l'aire est un *minimum*. En effet, puisque

$$X = -\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, \qquad Y = -\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

on a : $$X = -\frac{d.\sqrt{1+p^2+q^2}}{dp}, \qquad Y = -\frac{d.\sqrt{1+p^2+q^2}}{dq}.$$

Or, l'équation de la surface qui rend *minimum* la double intégrale $\int\int V dx dy$, V ne contenant que p et q, est comme on sait :

$$\left(\frac{d.\left(\frac{dV}{dp}\right)}{dx}\right) + \left(\frac{d.\left(\frac{dV}{dq}\right)}{dy}\right) = 0.$$

Si $V = \sqrt{1+p^2+q^2}$, et dans ce cas, la double intégrale $\int\int V dx dy$, représente l'aire de la surface ; l'équation du *minimum* sera :

$$\left(\frac{dX}{dx}\right) + \left(\frac{dY}{dy}\right) = 0.$$

X.

Il me reste enfin à parler de la surface dont les deux rayons de courbure sont égaux et dirigés dans le même sens.

Pour trouver son équation aux différences partielles, il faut exprimer que l'équation (6) a ses deux racines égales. On aura ainsi :

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right) + \left(\frac{dY}{dy}\right)\right]^2 - 4\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dy}\right) - \left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right)\right] = 0,$$

ou mettant pour les différences partielles indiquées leurs valeurs :

$$[(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t]^2 - 4[1+p^2+q^2][rt - s^2] = 0. \quad (7)$$

Telle est l'équation que M. Monge intègre dans son ouvrage, pag. 171, et qu'il parvient à représenter par le système de trois équations, entre lesquels un seul paramètre doit être éliminé.

Nous pouvons lui donner une autre forme ; en effet, la première équation ci-dessus peut s'écrire ainsi :

$$\left[\left(\frac{dX}{dx}\right) - \left(\frac{dY}{dy}\right)\right]^2 + 4\left(\frac{dX}{dy}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right) = 0,$$

ou bien:

$$[(1+q^2)r-(1+p^2)t]^2+4[(1+q^2)s-pqt][(1+p^2)s-pqr]=0.$$

Si comme dans le §. II, page 164 de ce cahier, on représente les quantités comprises entre les crochets dans cette équation, respectivement par B, A, C, l'équation deviendra:

$$B^2+4AC=0;$$

or, la relation $Ar=Bs+Ct$, donne $C=\frac{Ar-Bs}{t}$; l'équation $B^2+4AC=0$, peut donc se transformer en celle-ci:

$$B^2+\frac{4A(Ar-Bs)}{t}=0,$$

ou $$\frac{1}{t^2}[Bt-2As]^2+\frac{4A^2}{t^2}[rt-s^2]=0.$$

D'ailleurs l'équation (7) montre que $rt-s^2$ est une quantité essentiellement positive. On ne peut donc satisfaire à cette équation qu'en posant $A=0$, $B=0$, ou bien $rt-s^2=0$. Nous examinerons ce dernier cas particulier plus bas.

Les équations $A=0$, $B=0$, sont celles que M. Monge intègre d'abord, comme une solution particulière de l'équation (7), et il trouve que la sphère seule satisfait à ces deux équations.

Si nous posons $rt-s^2=0$, l'équation se réduit à:

$$r+t+(q\sqrt{r}-p\sqrt{t})^2=0:$$

or, je dis que ces deux équations:

$$rt-s^2=0,$$
$$r+t+(q\sqrt{r}-p\sqrt{t})^2=0,$$

n'ont de solutions réelles que $r=0$, $t=0$, $s=0$; équations qui ne conviennent qu'à un plan.

Car l'équation $rt=s^2$ exige que r et t soient de mêmes signes; or, si r et t sont tous deux positifs, la seconde équation ne sera pas satisfaite, puisqu'elle sera la somme de trois quantités positives: si au contraire, r et t sont négatifs, le carré $(q\sqrt{r}-p\sqrt{t})^2$ devient négatif; l'équation n'est pas plus satifaite: il faut donc poser $r=0$, $t=0$, et par suite $s=0$. Nous voyons donc que la sphère et le plan sont les seules surfaces dont les deux courbures soient égales dans tous leurs points, et encore peut-on ne parler que de la sphère, puisque le plan peut-être considéré comme une sphère d'un rayon infini.

XI.

Les équations $A=0$, $B=0$, reviennent évidemment à celles-ci : $\left(\frac{dY}{dx}\right)=0$, $\left(\frac{dX}{dy}\right)=0$. Or, il est très-facile de démontrer que ces équations sont celles qui expriment que la surface cherchée a dans tous ses points une sphère osculatrice : on sait, en effet, que pour qu'une sphère soit osculatrice d'une surface donnée, il faut que les quatre élémens de cette sphère remplissent six conditions qui résultent de l'égalité des coordonnées, et de leurs premières et secondes différences dans les deux surfaces. On pourra donc éliminer ces quatre élémens, et l'on aura deux équations pour exprimer la possibilité qu'une surface soit osculée par une sphère. Il s'agit d'arriver directement à ces deux équations : pour cela, soient a, b, c, r les coordonnées du centre et le rayon de la sphère osculatrice, la normale étant commune aux deux surfaces, on aura :

$$X=\frac{x-a}{r}, \quad Y=\frac{y-b}{r};$$

et comme ces équations ne contiennent que les premières différences p et q, on peut les différentier une fois, sans que l'égalité soit troublée ; on aura donc :

$$\left(\frac{dX}{dy}\right)=0, \quad \left(\frac{dY}{dx}\right)=0.$$

Ces deux équations indépendantes des élémens a, b, c, r, sont les deux équations de condition cherchées.

XII.

Théorèmes relatifs à la transformation des intégrales doubles.

L'expression que nous avons trouvée plus haut :

$$\frac{1}{RR'}=\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dy}\right)-\left(\frac{dX}{dy}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right),$$

a un rapport manifeste avec la formule qui sert à transformer les intégrales doubles. En effet, si dans l'intégrale $\iint Vdxdy$, on veut changer les variables x, y dans les variables u et t, on effectue d'abord la transformation algébrique dans la fonction V, puis on substitue à l'élément différentiel $dxdy$, celui-ci :

$$\left(\frac{dx}{du}\,\frac{dy}{dt}-\frac{dx}{dt}\,\frac{dy}{du}\right)dudt.$$

Or les cosinus X et Y qui sont fonctions des variables indépendantes x et y, peuvent eux-mêmes être considérés comme deux variables indépendantes, dont x et y seraient fonctions; mais alors une double intégrale telle que $\iint VdXdY$, relatives aux variables X et Y, équivaut à celle-ci :

$$\iint V\left[\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dy}\right)-\left(\frac{dX}{dy}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right)\right]dxdy,$$

et réciproquement.

Or l'expression : $\left(\frac{dX}{dx}\right)\left(\frac{dY}{dy}\right)-\left(\frac{dX}{dy}\right)\left(\frac{dY}{dx}\right)$, développée donne: $\frac{1}{RR'}=\frac{rt-s^2}{(1+p^2+q^2)^2}$, en sorte que la double intégrale $\iint\frac{V(rt-s^2)\,dxdy}{(1+p^2+q^2)^2}$, équivaut à celle-ci : $\iint VdXdY$.

Faisons $V=U(1+p^2+q^2)^2$; nous aurons alors le théorême suivant :

L'intégrale double $\iint U(rt-s^2)\,dxdy$, prise sur une surface quelconque est égale à celle-ci : $\iint\frac{UdXdY}{(1-X^2-Y^2)^2}$, prise entre les limites correspondantes à celles de la première.

Comme on a $p=\frac{-X}{\sqrt{1-X^2-Y^2}}$, $q=\frac{-Y}{\sqrt{1-X^2-Y^2}}$, il est clair que si U dans la première intégrale ne contient que p et q, la transformation s'effectuera de même, quelle que soit l'équation de la surface sur laquelle on prend l'intégrale : on trouve ainsi ce second théorême.

L'intégrale double $\iint U(rt-s^2)\,dxdy$, U ne contenant que p et q, est indépendante de l'équation qui peut exister entre les coordonnées x, y, z, elle est égale à $\iint\frac{UdXdY}{(1-X^2-Z^2)^2}$, U ne contenant alors que X, Y.

L'intégrale $\iint U(rt-s^2)\,dxdy$ ne doit donc varier que par ses limites. La variation de cette intégrale ne doit donc pas contenir de termes affectés du double signe, c'est ce que nous allons vérifier.

Faisons $T=U(rt-s^2)$. On sait que dans le développement de la variation $\delta\iint Tdxdy$, la quantité qui se trouve sous le double signe, multipliée par $dxdy\,\delta z$, est :

$$\left(\frac{dT}{dz}\right)-\left(\frac{d.\left(\frac{dT}{dp}\right)}{dx}\right)-\left(\frac{d\left(\frac{dT}{dq}\right)}{dy}\right)$$
$$+\left(\frac{d^2\left(\frac{dT}{dr}\right)}{dx^2}\right)+\left(\frac{d^2\left(\frac{dT}{ds}\right)}{dxdy}\right)+\left(\frac{d^2\left(\frac{dT}{dt}\right)}{dy^2}\right), \text{ etc.}$$

Ici T ne contient que p, q, r, s, t. Cette quantité peut douc s'écrire ainsi :

$$\frac{d.\left[\left(\frac{d\left(\frac{dT}{dr}\right)}{dx}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{d\left(\frac{dT}{ds}\right)}{dy}\right)-\left(\frac{dT}{dp}\right)\right]}{dx}$$
$$+\frac{d.\left[\left(\frac{d\left(\frac{dT}{dt}\right)}{dy}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{d\left(\frac{dT}{ds}\right)}{dx}\right)-\left(\frac{dT}{dq}\right)\right]}{dy},$$

ou bien :
$$\left(\frac{dA}{dx}\right)+\left(\frac{dB}{dy}\right),$$

en représentant par A, la quantité entre les crochets, différentiée par rapport à x, et par B celle que l'on différentie par rapport à y.

Or, U n'étant fonction que de p et de q, ou aura :

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)=Ut,\quad \left(\frac{dT}{ds}\right)=-2Us,\quad \left(\frac{dT}{dt}\right)=Ur,$$
$$\left(\frac{dT}{dp}\right)=(rt-s^2)\left(\frac{dU}{dp}\right),\quad \left(\frac{dT}{dq}\right)=(rt-s^2)\left(\frac{dU}{dq}\right),$$
$$\left(\frac{dU}{dx}\right)=\left(\frac{dU}{dp}\right)r+\left(\frac{dU}{dq}\right)s,\quad \left(\frac{dU}{dy}\right)=\left(\frac{dU}{dp}\right)s+\left(\frac{dU}{dq}\right)t.$$

Substituant ces valeurs dans A et B, on les trouve identiquement nulles, quel que soit U.

XIII.

Il s'ensuit donc que la variation $\delta\iint U(rt-s^2)\,dxdy$, ne contient que les termes relatifs aux limites de l'intégrale. Ainsi l'intégrale sera la même pour deux surfaces dans lesquelles les limites de cette intégrale seront les mêmes. Il ne résulte pas delà que dans

tous les cas, la somme des élémens $U(rt-s^2)\,dxdy$, sera aussi la même pour les surfaces. Car cette somme cesse d'être représentée par l'intégrale $\iint U(rt-s^2)\,dxdy$, si la surface sur laquelle on la prend n'a pas une courbure uniforme, de manière que l'élément de l'intégrale devienne nul, indéterminé, ou même infini en certains points. Cette observation est importante, et empêche de tomber dans des paradoxes frappans. Ainsi, pour en donner un exemple très-général, concevons qu'une portion de surface fermée, telle qu'une calotte sphérique, soit circonscrite par une surface développable ; les limites de l'intégrale pour ces deux surfaces seront bien les mêmes, et pourtant il est clair que l'intégrale $\iint U(rt-s^2)\,dxdy$ appliquée à une portion quelconque d'une surface développable est nulle, puisqu'on a alors $rt-s^2=0$; tandis qu'elle ne le sera pas pour la surface inscrite à la surface développable. Mais examinons attentivemment la marche de l'intégrale sur les deux surfaces. Sur la surface inscrite, par une direction quelconque, on arrive toujours d'une limite à l'autre sans discontinuité : au contraire, sur la surface développable, si l'on se dirige sur une génératrice de cette surface pour passer d'une limite à l'autre, on n'y arrive jamais. La seule manière de lier les deux limites entre elles, pour une direction quelconque de la surface, serait de concevoir la surface terminée à l'infini par une autre portion de surface qui lui serait aussi inscrite ; mais alors la double intégrale passe évidemment par une indétermination complette, lorsqu'on l'applique aux points de cette seconde surface. Cette considération me paraît d'autant plus exacte, que si l'on conçoit la surface développable circonscrite à une autre calotte, ayant sa courbure dans le même sens que la première, l'intégrale appliquée à-la-fois à la surface développable et à cette seconde calotte sera la même que pour la première calotte. Car par la propriété connue des surfaces développables, les normales qui terminent la première surface inscrite, seront parallèles à celles qui terminent la seconde; les limites des intégrales pour ces deux calottes seront les mêmes ; et comme je suppose leur courbure uniforme, les valeurs de ces intégrales seront rigoureusement les mêmes ; d'ailleurs l'intégrale sera nulle pour toute la portion de surface développable qui sépare les deux calottes.

XIV.

Si l'on fait $U=(1+p^2+q^2)^{-\frac{3}{2}}$, la double intégrale $\iint U(rt-s^2)\,dxdy$, devient $\iint\frac{(rt-s^2)\,dxdy}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$; elle représente la somme des élémens d'une surface divisés par le produit

des rayons de courbure correspondans (*). Par notre théorême, on peut la remplacer par la double intégrale $\iint\frac{UdXdY}{(1-X^2-Y^2)^{\frac{1}{2}}}$, qui devient alors $\iint\frac{dXdY}{\sqrt{1-X^2-Y^2}}$. Cette dernière exprime l'aire d'une sphère, dont l'équation serait :

$$X^2+Y^2+Z^2=1.$$

Si l'on observe maintenant qu'à chaque élément pris sur la surface générale, correspond un élément de cette sphère, dont les coordonnées sont les cosinus des angles formés par la normale à la première surface avec les axes des coordonnées, on est conduit à la construction suivante.

Concevons une sphère d'un rayon égal à l'unité ; puis faisons mouvoir le rayon de cette sphère, de manière qu'il soit successivement parallèle à toutes les normales de la portion de surface sur laquelle on veut prendre l'intégrale, l'aire sphérique décrite par l'extrémité de ce rayon mobile, sera la valeur de l'intégrale cherchée (**).

XV.

Cette construction qui est fort simple, montre d'une manière très-satisfaisante la marche de l'intégrale sur la surface. En effet, si dans toute l'étendue de surface que l'on considère, la courbure varie uniformément, en sorte que la normale ne passe jamais deux fois par la même direction, le rayon mobile ne rebroussera donc jamais dans sa marche, et alors la valeur de l'intégrale sera précisément l'aire sphérique comprise entre le deux courbes que tracerait le rayon mobile, si dans son mouvement il n'était parallèle

---

(*) M. Poisson ayant reconnu que la variation de cette intégrale était nulle, m'engagea à en calculer la valeur pour un ellipsoïde entier ; je la trouvai égale à 4π. Depuis je me suis occupé d'en trouver la valeur générale, et j'ai été conduit alors aux théorêmes que j'expose ici.

(**) M. Binet démontre ce théorême de M. Rodrigues, par une considération géométrique fort simple. Désignant par ds et ds', les élémens des deux lignes de courbure principales, qui se coupent au même point à angle droit (théorême de M. Monge) ; l'élément de la surface peut être représenté par $dsds'$, et la double intégrale sera $\iint\frac{ds}{R}\cdot\frac{ds'}{R'}$. Or, les fractions $\frac{ds}{R}$ et $\frac{ds'}{R'}$ sont les élémens de deux cercles décrits d'un rayon égal à l'unité et perpendiculaires entre eux ; leur produit est donc l'élément de la sphère du même rayon, et par conséquent l'intégrale représente l'air d'une portion de cette sphère. (Extrait du Bulletin de la société philomatique, pag. 36, année 1815.)

qu'aux normales qui passent par les deux courbes limites sur la surface. Dans ce cas, il est bien vrai de dire que si pour deux surfaces, les limites de l'intégrale sont les mêmes, l'intégrale sera aussi la même, parce qu'alors la courbure des deux surfaces est uniforme. Si, au contraire, la courbure de l'une de ces deux surfaces éprouve des changemens brusques, si deux normales différentes peuvent avoir la même direction absolue, alors le rayon mobile rebroussant chemin, aura décrit une aire sphérique plus grande que celle comprise entre les deux courbes sphériques, dont je viens de parler plus haut, la valeur de l'intégrale ne sera donc pas la même pour les deux surfaces. Si l'une de ces deux surfaces est développable, le rayon mobile conservera la même position pour tous les points de la même génératrice. Cette position ne changera qu'en passant d'une génératrice à celle qui lui est consécutive; de sorte que le rayon mobile décrira simplement une courbe, au lieu de décrire une portion de sphère, si petite qu'elle soit. La valeur de l'intégrale sera donc nulle.

Tout ceci s'accorde parfaitement avec ce que nous avons dit, §. XIII.

XVI.

Veut-on avoir la valeur de l'intégrale pour toute une surface fermée et d'une courbure uniforme, comme un ellipsoïde, par exemple; il est évident qu'alors le rayon mobile décrit la sphère entière, dont le rayon est l'unité. On a donc dans ce cas:

$$\iint \frac{(rt-s^2)\,dxdy}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = 4\pi.$$

Si la surface, semblable à celle d'un anneau, est doublement convexe et fermée, le rayon mobile décrit deux fois la sphère:

$$\iint \frac{(rt-s^2)\,dxdy}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = 8\pi.$$

S'il s'agit d'une surface de révolution, et qu'on veuille prendre l'intégrale entre deux plans perpendiculaires à l'axe. Il est clair que l'aire sphérique qui en est la valeur, sera une zône d'une hauteur égale à la différence des cosinus des angles que font avec l'axe de révolution, les normales menées à la surface aux deux sections limites: soient a et a' ces deux cosinus, on aura:

$$\iint \frac{(rt-s^2)\,dxdy}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}} = 2\pi\,(a'-a).$$

XVII.

Considérons séparement les surfaces du second degré, les intégrales étant prises dans toute leur étendue. Pour l'ellipsoïde entier, la valeur de l'intégrale sera 4π; pour les deux paraboloïdes, l'intégrale n'est que 2π, car il est évident que si le plan tangent à ces surfaces peut prendre toutes les directions, il ne prend jamais deux fois la même; l'angle de la normale avec l'axe ne varie que de $100°$, et le rayon mobile ne décrit donc que la moitié de la sphère.

Pour les deux hyperboloïdes, on est ramené à évaluer une aire sphérique, dont la quadrature dépend de la rectification des sections coniques. Mais s'ils sont de révolution, l'intégrale s'obtient aisément par ce que nous avons démontré, en général, pour les surfaces de révolution.

Considérons l'hyperboloïde à une nappe, et cherchons l'intégrale seulement pour la moitié de cette surface, l'hyperboloïde étant censé coupé par le plan perdiculaire à l'axe passant par le centre. Les deux plans limites sont ici, 1°. ce plan, qui partage l'hyperboloïde en deux parties égales et symétriques; 2°. un plan parallèle à celui-là, mais à l'infini, et qui coupe suivant une même courbe, l'hyperboloïde et le cône asymptote. Soit e l'excentricité, on aura pour les valeurs des deux cosinus a et a', $a=0$, $a'=\frac{1}{e}$.

La valeur de l'intégrale sera donc $\frac{2\pi}{e}$ et $\frac{4\pi}{e}$ pour l'hyperboloïde entier.

Pour l'hyperboloïde de révolution à deux nappes, on a:

$$a=1, \qquad a'=\frac{\sqrt{e^2-1}}{e},$$

la forme de la surface montre qu'au lieu de la formule $2\pi(a'-a)$, c'est la formule $2\pi(a-a')$ qu'il faut employer; on aura ainsi pour le demi-hyperboloïde:

$$2\pi\left(\frac{e-\sqrt{e^2-1}}{e}\right), \text{ et } \quad 4\pi\left(\frac{e-\sqrt{e^2-1}}{e}\right)$$

pour l'hyperboloïde entier.

J'ai vérifié tous ces divers résultats relatifs aux surfaces du second degré, par l'intégration directe de la formule

$$\iint\frac{(rt-s^2)\,dxdy}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Addition aux recherches précédentes ; par M. Rodrigues.

Le théorême de calcul intégral, auquel nous ont conduits les formules relatives aux lignes de courbure, peut être démontré directement de la manière suivante.

L'intégrale double $\iint U(rt-s^2)\,dxdy$, peut s'écrire ainsi :

$$\iint U\left(\frac{dp}{dx}\frac{dq}{dy}-\frac{dp}{dy}\frac{dq}{dx}\right)dxdy.$$

Sous cette forme on voit sur-le-champ qu'elle équivaut à l'intégrale double $\iint Udpdq$, relative aux variables p, q ; et que si U n'est fonction que de p et q, cette intégrale ne dépend que de ses limites.

Maintenant on peut changer les variables p, q, en d'autres qui en soient des fonctions données. Ainsi on peut leur substituer les variables X, Y, qui sont les cosinus des angles que la normale fait avec les axes des x et des y.

On aura dans ce cas :

$$\iint U(rt-s^2)dxdy=\iint Udpdq=\iint U\left(\frac{dp}{dX}\frac{dq}{dY}-\frac{dp}{dY}\frac{dq}{dX}\right)dXdY;$$

mais $$p=\frac{-X}{\sqrt{1-X^2-Y^2}},\quad q=\frac{-Y}{\sqrt{1-X^2-Y^2}}:$$

on trouve ainsi, comme nous y sommes déja parvenus :

$$\iint U(rt-s^2)\,dxdy=\iint\frac{UdXdY}{(1-X^2-Y^2)^2}.$$

De pareilles considérations s'appliquent aux intégrales doubles, composées d'une manière analogue en différences partielles d'ordres supérieurs. Si nous posons, comme M. Monge,

$$dr=udx+udy,$$
$$ds=udx+wdy,$$
$$dt=wdx+vdy,$$

nous trouverons que l'intégrale double :

$$\iint U(uw-w^2)\,dxdy=\iint\frac{UdX'dY'}{(1-X'^2-Y'^2)^2}.$$

Les variables X', Y' étant données par ces équations :

$$X' = \frac{-r}{\sqrt{1+r^2+s^2}}, \qquad Y' = \frac{-s}{\sqrt{1+r^2+s^2}};$$

et que si U ne contient que r, s, l'intégrale $\iint U(uw - m^2)\,dxdy$ ne varie que par ses limites : ce que l'on peut aussi vérifier par le calcul des variations.

D'ailleurs, tous ces divers théorêmes, ainsi que les vérifications qu'on en pourrait faire par le calcul des variations, sont renfermés dans l'analyse suivante.

Soient P, Q, deux fonctions quelconques des variables x, y; faisons :

$$dP = Rdx + Sdy,$$
$$dQ = S'dx + Tdy.$$

S et S' seront égaux, si $Pdx + Qdy$ est une différentielle exacte.

Cela posé, il est évident que l'intégrale $\iint U(RT - SS')\,dxdy$, revient à celle-ci : $\iint UdPdQ$; et que si U ne contient que P et Q, cette intégrale ne varie que par ses limites.

Il suffit pour vérifier la seconde partie de ce théorême, d'attribuer à une des deux fonctions P, Q, à P par exemple, une variation arbitraire δP, et de voir la variation de l'intégrale double $\iint U(RT - SS')\,dxdy$, ne contient que des termes relatifs aux limites. Or il est facile de voir par la méthode des variations, que la partie de la variation $\delta \iint U(RT - SS')\,dxdy$, contenue sous le double signe intégral, se réduit à :

$$(RT - SS')\frac{dU}{dP} - \frac{d.UT}{dx} + \frac{d.US'}{dy}.$$

Or, si l'on développe cette expression, on la trouve identiquement nulle, en observant que :

$$\frac{d.UT}{dx} = T\left(\frac{dU}{dP}R + \frac{dU}{dQ}S'\right) + U\frac{dT}{dx},$$
$$\frac{d.US'}{dy} = S'\left(\frac{dU}{dP}S + \frac{dU}{dQ}T\right) + U\frac{dS'}{dy},$$
$$\frac{dT}{dx} = \frac{dS'}{dy}.$$

Prenons de nouvelles variables u, t, qui soient des fonctions

données de P, Q, on aura :

$$\iint U(RT-SS')\,dxdy=\iint U\left(\frac{dP}{du}\frac{dQ}{dt}-\frac{dP}{dt}\frac{dQ}{du}\right)dudt\,;$$

si l'on fait :

$$U=\frac{1}{(1+P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}},\quad u=\frac{-P}{\sqrt{1+P^2+Q^2}},\quad t=\frac{-Q}{\sqrt{1+P^2+Q^2}},$$

on trouve ce résultat très-général :

$$\iint\frac{(RT-SS')\,dxdy}{(1+P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}=\iint\frac{dudt}{\sqrt{1-u^2-t^2}}.$$

Si $Pdx+Qdy$ est une différentielle exacte, soit Z l'intégrale de cette différentielle ; alors l'intégrale ci-dessus, devient :

$$\iint\frac{(RT-SS')\,dxdy}{(1+P^2+Q^2)^{\frac{3}{2}}}:$$

elle exprime la somme des élémens de la surface, dont l'ordonnée est Z, divisés par le produit des deux rayons de courbure ; u, t sont les cosinus des angles formés par la normale à cette surface, avec les axes des x et des y.

Par conséquent toutes les intégrales doubles, telles que :

$$\iint\frac{(rt-s^2)\,dxdy}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}},\quad\iint\frac{(uw-m^2)\,dxdy}{(1+r^2+s^2)^{\frac{3}{2}}},\quad\iint\frac{(mv-w^2)\,dxdy}{(1+s^2+t^2)^{\frac{3}{2}}},$$

expriment au fond la même chose, et se ramènent toutes à la quadrature de la sphère.

Si l'on fait $U=\frac{1}{\sqrt{1-P^2-Q^2}}$, $u=P$, $t=Q$, on trouve :

$$\iint\frac{(RT-SS')\,dxdy}{\sqrt{1-P^2-Q^2}}=\iint\frac{dudt}{\sqrt{1-u^2-t^2}},$$

ce qui fournit une nouvelle classe d'intégrales doubles qui se ramènent à la quadrature de la sphère.

Les combinaisons de différences partielles, telle que $RT-SS'$, jouissent de propriétés très-importantes dans le calcul des équations aux différences partielles. Il est singulier, qu'on n'ait pas encore aperçu l'analogie qu'elles ont avec les formules par lesquelles on transforme les intégrales doubles, et les théorêmes qu'on peut en déduire relativement à la courbure des surfaces.

Problême sur le pendule simple ; par M. Deflers, *licencié ès-sciences.*

Supposons un pendule simple à l'état de repos ; donnons au point de suspension, assujéti d'ailleurs à se mouvoir sur une ligne horisontale, une impulsion qui lui communique suivant cette droite une vîtesse connue, et proposons-nous de déterminer le mouvement que prendra le pendule.

Il est évident que ce mouvement aura lieu dans le plan vertical qui comprend la direction de la vîtesse initiale, et qu'il revient à celui du systême de deux points dont l'un, astreint à rester sur une ligne horisontale, n'est d'ailleurs soumis à aucune force accélératrice, et dont l'autre, animé par la pesanteur, doit en outre rester à une distance constante du premier. Pour le déterminer, rapportons ces points à deux axes rectangulaires des x et des y ; le premier étant pris sur la droite même que décrit le point de suspension, le second, dirigé dans le sens de la pesanteur, coïncidera avec la direction initiale du pendule. Cela posé, soient x et x', y' les coordonnées de ces points au bout du tems t : conformément à l'énoncé du principe de d'Alembert, cherchons les vîtesses perdues par chaque point, en vertu de la liaison du systême. Elles sont, pour le premier,

$$-\frac{d^2x}{dt}, \text{ pour le second, } -\frac{d^2x'}{dt},\ gdt-\frac{d^2y'}{dt},$$

et le principe des vîtesses virtuelles donne pour équation d'équilibre :

$$\frac{d^2x}{dt}\delta x+\frac{d^2x'}{dt}\delta x'+\left(\frac{d^2y'}{dt}-gdt\right)\delta y'=0:$$

de plus, la distance des points proposés étant constante et égale à la longueur du pendule que je représente par l, on a :

$$(x-x')^2+y'^2=l^2, \qquad (1)$$

ce qui donne :

$$(x-x')(\delta x-\delta x')+y'\delta y'=0.$$

Éliminant entre cette équation et celle d'équilibre l'une quelconque des variations δx, $\delta x'$, $\delta y'$, l'équation se partagera dans les deux

suivantes :

$$y'\frac{d^2x}{dt}-\left(\frac{d^2y'}{dt}-gdt\right)(x-x')=0, \qquad (2)$$

$$y'\frac{d^2x'}{dt}+\left(\frac{d^2y'}{dt}-gdt\right)(x-x')=0, \qquad (3)$$

qui jointes à (1) completteront la solution du problême, puisque ces trois équations comprennent les quatre quantités x, x', y' et t, et qu'on connaît d'ailleurs la trajectoire du premier point.

Ajoutant (2) et (3), on a : $\frac{d^2x}{dt}+\frac{d^2x'}{dt}=0$, équation qui s'intègre et donne $x+x'=ct+c'$, mais à l'origine :

$$t=0,\quad x'=0,\quad x=0,\quad \frac{dx'}{dt}=0,\quad \frac{dx}{dt}=a,$$

a représentant la vîtesse imprimée au point de suspension : l'équation finie devient donc $x+x'=at$. Pour obtenir une nouvelle intégrale, retranchons (3) de (2), nous aurons :

$$y'\left(\frac{d^2x}{dt}-\frac{d^2x'}{dt}\right)-2\left(\frac{d^2y'}{dt}-gdt\right)(x-x')=0,$$

équation que nous ramènerons à ne contenir que deux variables, en changeant de coordonnées et déterminant le second des points proposés, par l'angle θ que la direction du pendule fait avec la verticale menée par le point de suspension, et l'abscisse x de ce point. En effet, cette transformation donne :

$$y'=l\cos\theta,\qquad x-x'=l\sin\theta,$$

et change l'équation précédente en

$$l\cos\theta\,(l\cos\theta d^2\theta-l\sin\theta d\theta^2)+2l\sin\theta\,(gdt^2+l\cos\theta d\theta^2+l\sin\theta d^2\theta)=0,$$

ou, divisant tout par l, développant et réduisant :

$$l(1+\sin^2\theta)\,d^2\theta+l\sin\theta\cos\theta d\theta^2+2g\sin\theta dt^2=0: \qquad (\alpha)$$

posant $d\theta=\theta' dt$, d'où $d^2\theta=d\theta' dt=\frac{\theta' d\theta' dt^2}{d\theta}$, il vient :

$$\left\{\begin{array}{l} l(1+\sin^2\theta)\,\theta' d\theta'+l\sin\theta\cos\theta.\theta'^2 d\theta \\ +2g\sin\theta d\theta=\frac{1}{2}d.\{l(1+\sin^2\theta)\,\theta'^2-4g\cos\theta\}=0. \end{array}\right.$$

Cette dernière équation a pour intégrale :

$$l(1+\sin^2\theta)\,\theta'^2-4g\cos\theta=c,$$

ou remettant pour θ' sa valeur, $l(1+\sin^2\theta)d\theta^2-4g\cos\theta dt^2=cdt^2$.
Déterminons la constante c: pour cela remarquons que des équations :

$$x+x'=at, \quad \text{et} \quad x-x'=l\sin\theta,$$

résultent les suivantes :

$$2x=at+l\sin\theta, \quad 2x'=at-l\sin\theta, \quad 2\frac{dx'}{dt}=a-l\cos\theta\frac{d\theta}{dt},$$

qui donnent à l'origine $\theta=0$, $\frac{d\theta}{dt}=\frac{a}{l}$; d'où l'on tire, $c=\frac{a^2-4gl}{l}$. Nous avons donc pour remplacer les équations (1), (2) et (3), le système suivant :

$$y'=l\cos\theta, \quad (4) \qquad 2x'=at-l\sin\theta, \quad (5)$$

$$2x=at+l\sin\theta, \ (6) \quad l^2(1+\sin^2\theta)d\theta^2=(a^2-4gl+4gl\cos\theta)dt^2. \ (7)$$

En éliminant t entre les équations (5) et (7), on a, pour l'équation différentielle de la trajectoire du point inférieur, rapportée aux coordonnées x' et θ,

$$2\,dx'=\frac{al\sqrt{1+\sin^2\theta}}{\sqrt{a^2-4gl+4gl\cos\theta}}d\theta-l\cos\theta d\theta.$$

Son intégration dépend de la même quadrature que celle de l'équation (7), mais on peut sans le secours de ces intégrales discuter plusieurs circonstances du mouvement, en suivant la marche des quantités θ, x' et x, et cherchant, à cet effet, leurs *maximums* et *minimums*. Pour cela, l'expression de $\frac{d\theta}{dt}$ égalée à zéro, donne :

$$a^2-4gl+4gl\cos\theta=0, \quad \text{d'où} \quad \cos\theta=-\frac{a^2-4gl}{4gl}.$$

Les valeurs de θ, tirées de cette équation sont donc impossibles pour $a^2-4gl>4gl$ ou $a^2>8gl$; il n'en est pas de même pour $a^2<8gl$; et en désignant la plus petite d'entre elles par Θ, il vient $\Theta=\pi$, $>\frac{\pi}{2}$, $=\frac{\pi}{2}$, $<\frac{\pi}{2}$, suivant qu'on a :

$$a^2=8gl, \quad >4gl, \quad =4gl, \quad <4gl.$$

Examinons si ces valeurs correspondent en effet à un *maximum*.

Pour cela, faisons dans l'équation (α) $\frac{d\theta}{dt}$ nul ; elle donnera :

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{2g\sin\theta}{l(1+\sin^2\theta)}.$$

Cette expression, nulle pour la première valeur de Θ, est essentiellement négative pour les suivantes, qui sont par conséquent des *maximums*. De plus, la valeur $-\Theta$, qui satisfait aussi à $\frac{d\theta}{dt} = 0$, la rendant positive, répond à un *minimum*. Cette dernière circonstance fait voir que pour $a^2 < 8gl$, θ croît d'abord de zéro à la valeur *maximum* Θ, puis diminue, devient nul et décroît jusqu'à la valeur *minimum* $-\Theta$, après quoi il recommence à croître, repasse par zéro et éprouve de nouveau les mêmes variations. Nous examinerons plus loin la valeur $\Theta = \pi$, qui donne $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$; considérons maintenant les quantités x' et x.

Les équations (5) et (6) donnent :

$$\frac{2dx'}{dt} = a - l\cos\theta\frac{d\theta}{dt}, \quad \text{et} \quad \frac{2dx}{dt} = a + l\cos\theta\frac{d\theta}{dt},$$

ou en vertu de (7),

$$\frac{2dx'}{dt} = \frac{a\sqrt{1+\sin^2\theta} - \cos\theta\sqrt{a^2 - 4gl + 4gl\cos\theta}}{\sqrt{1+\sin^2\theta}},$$

$$\frac{2dx}{dt} = \frac{a\sqrt{1+\sin^2\theta} + \cos\theta\sqrt{a^2 - 4gl + 4gl\cos\theta}}{\sqrt{1+\sin^2\theta}}.$$

Il résulte de ces deux expressions, en les égalant à zéro, l'équation :

$$a^2(1+\sin^2\theta) \quad \cos^2\theta(a^2 - 4gl + 4gl\cos\theta),$$

ou

$$2gl\cos^2\theta(\cos\theta - 1) + a^2(\cos^2\theta - 1) = 0,$$

qui donne :

$$\cos\theta = 1, \quad \text{et} \quad 2gl\cos^2\theta + a^2\cos\theta + a^2 = 0;$$

d'où

$$\cos\theta = -\frac{a^2}{4gl} \pm \sqrt{\frac{a^4}{16g^2l^2} - \frac{a^2}{2gl}} = -1 - \left\{\frac{a^2}{4gl} - 1 \mp \sqrt{\left(\frac{a^2}{4gl} - 1\right)^2 - 1}\right\}$$

Dans la dernière expression, le signe de la quantité entre les parenthèses dépend de celui de $\frac{a^2}{4gl} - 1$, donc $\frac{a^2}{4gl} > 1$, donne $\cos\theta$ négatif et plus grand que 1, tandis que $\frac{a^2}{4gl} = 1$ ou < 1 entraîne $\cos\theta$ imaginaire; ainsi dans tous les cas, la valeur correspondante de θ est impossible. Il reste donc à examiner la valeur $\cos\theta = 1$; d'où $\sin\theta = 0$, qui satisfait à $\frac{dx'}{dt} = 0$, mais non à $\frac{dx}{dt} = 0$; or on a :

$$2\frac{d^2x'}{dt^2} = -l\cos\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} + l\sin\theta\frac{d\theta^2}{dt^2},$$

expression que la supposition $\sin\theta = 0$ anéantit, puisque l'équation (α) donne alors $\frac{d^2\theta}{dt^2} = 0$. Formons les équations, d'où dépendent $\frac{d^3\theta}{dt^3}$ et $\frac{d^3x'}{dt^3}$: en négligeant les termes affectés de $\sin\theta$, et de $\frac{d^2\theta}{dt^2}$, et posant $\cos\theta = 1$, elles se réduisent à :

$$l\frac{d^3\theta}{dt^3} + l\frac{d\theta^3}{dt^3} + 2g\frac{d\theta}{dt} = 0,$$

et

$$2\frac{d^3x'}{dt^3} = -l\frac{d^3\theta}{dt^3} + l\frac{d\theta^3}{dt^3} = 2\frac{d\theta}{dt}\left(l\frac{d\theta^2}{dt^2} + g\right),$$

en vertu de la première. Ce dernier résultat ne pouvant être annulé par la valeur $\cos\theta = 1$, celle-ci ne correspond point à un *maximum*; x' et x croissent donc indéfiniment.

Cette discussion nous a présenté trois cas distincts, correspondant aux trois circonstances $a^2 > 8gl$, $= 8gl$, $< 8gl$. Dans le premier θ croît sans cesse, et si dans les expressions :

$$2\frac{dx}{dt} = a + l\cos\theta\frac{d\theta}{dt},\quad 2\frac{dx'}{dt} = a - l\cos\theta\frac{d\theta}{dt},\quad \frac{dy'}{dt} = -l\sin\theta\frac{d\theta}{dt}, \quad (8)$$

qui donnent les vîtesses des points proposés, on fait $\theta = 2\pi$, d'où $\cos\theta = 1$, $\sin\theta = 0$, et $\frac{d\theta}{dt} = \frac{a}{l}$, il vient :

$$\frac{dx}{dt} = a,\quad \frac{dx'}{dt} = 0,\quad \frac{dy'}{dt} = 0.$$

Le pendule se trouve donc alors absolument dans les mêmes circonstances qu'à l'origine ; ainsi son mouvement est périodique.

Lorsque $a^2 = 8gl$, θ croît jusqu'à la valeur $\Theta = \pi$, qui donne :

$$\frac{d\theta}{dt} = 0, \quad \frac{dx}{dt} = \tfrac{1}{2}a, \quad \frac{dx'}{dt} = \tfrac{1}{2}a, \quad \frac{dy'}{dt} = 0,$$

le pendule, alors vertical, est dirigé en sens contraire de la pesanteur, et ses deux extrémités sont animées de vîtesses horisontales égales et dirigées dans le même sens : mais on verra plus loin qu'il n'arrive à cette position qu'après un tems infini.

Enfin, dans le troisième cas, θ croissant d'abord avec t, il faut prendre les formules (8) jusqu'à $\theta = \Theta$: passé cette valeur, θ restant positif et diminuant, $\frac{d\theta}{dt}$ devient négatif, ce qui donne le système :

$$2\frac{dx}{dt} = a - l\cos\theta\frac{d\theta}{dt}, \quad 2\frac{dx'}{dt} = a + l\cos\theta\frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{dy'}{dt} = l\sin\theta\frac{d\theta}{dt}, \qquad (9)$$

qu'il faut employer de $\theta = \Theta$ à $\theta = 0$: cette dernière valeur donne :

$$\frac{dx}{dt} = 0, \quad \frac{dx'}{dt} = a, \quad \frac{dy'}{dt} = 0 :$$

ainsi le pendule ne diffère de ce qu'il était à l'origine, qu'en ce que l'impulsion est communiquée au point inférieur. Pour le suivre dans la région négative, il faut employer successivement les systêmes (8) et (9), en y changeant θ en $-\theta$ et $d\theta$ en $-d\theta$. Le dernier donnera, après ce changement, et pour $\theta = 0$, $\frac{dx}{dt} = a$, $\frac{dx'}{dt} = 0$, $\frac{dy'}{dt} = 0$; le pendule se trouvant alors exactement comme à l'origine, son mouvement sera encore périodique.

Pour compléter la solution du problême, il reste à intégrer l'équation (7), ce qui ne peut se faire que par approximation, puisqu'elle contient un radical du cinquième degré.

Cette équation résolue par rapport à dt donne :

$$dt = \frac{l\sqrt{1 + \sin^2\theta}\,.\,d\theta}{\sqrt{a^2 - 4gl + 4gl\cos\theta}}.$$

En y faisant $\cos\theta = z$ et $\frac{4gl}{a^2 - 4gl} = m$, il vient :

$$dt = -\frac{2l}{\sqrt{2a^2-8gl}}\,\frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{1+mz}\sqrt{1-z^2}}\,dz.$$

Supposons d'abord $a^2 > 8gl$, il en résulte $m < 1$, ce qui permet de développer suivant les puissances ascendantes de z la quantité $(1+mz)^{-\frac{1}{2}}$. On a par la formule du binome :

$$\left(1-\frac{1}{2}z^2\right)^{\frac{1}{2}} = 1 - A_2z^2 - A_4z^4 - \ldots (1+mz)^{-\frac{1}{2}} = 1 - A'_1mz + A'_2m^2z^2\ldots$$

Ces développemens multipliés entre eux, donnent pour celui de $\dfrac{\sqrt{1-\frac{1}{2}z^2}}{\sqrt{1+mz}}$, la série :

$$\left\{\begin{array}{l} 1 - A'_1mz + (A'_2m^2 - A_2)z^2 - (A'_3m^3 - A'_1A_2m)z^3 \\ + (A'_4m^4 - A'_2A_2Am^2)z^4 + \ldots, \end{array}\right.$$

dont la loi est évidente, et que nous représenterons par

$$1 - B_1z + B_2z^2 - B_3z^3 + B_4z^4 - \ldots;$$

désignant aussi le coefficient $\dfrac{2l}{\sqrt{2a^2-8gl}}$ par α, il vient :

$$t = -\alpha\left\{\int\frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} - B_1\int\frac{zdz}{\sqrt{1-z^2}} + B_2\int\frac{z^2dz}{\sqrt{1-z^2}}\ldots\right\},$$

ou mettant pour les intégrales leurs valeurs connues :

$$\left\{\begin{array}{l} t = c' - \alpha \operatorname{arc}(\sin = z)\left\{1 + \frac{1}{2}B_2 + \frac{1.3}{2.4}B_4 + \frac{1.3.5}{2.4.6}B_6\ldots\right\} \\ - \alpha\sqrt{1-z^2}\left\{\begin{array}{l} B_1 + \frac{1.2}{1.3}B_3 + \frac{1.2.4}{1.3.5}B_5 + \ldots \\ -z\left(\frac{1}{2}B_2 + \frac{1.3}{2.4}B_4\ldots\right) \\ +z^2\left(\frac{1}{3}B_3 + \frac{1.4}{3.5}B_5 + \ldots\right) \\ - \text{etc.} \end{array}\right\} \end{array}\right.$$

à l'origine $t=0$, $\theta=0$, $z=\cos\theta=1$; ainsi:

$$c'=\alpha\frac{\pi}{2}\left\{1+\frac{1}{2}B_2+\frac{1.3}{2.4}B_4\ldots\right\};$$

désignant par K, Z_0, $Z_1\ldots$ les séries qui entrent comme coefficiens dans l'expression de t, et mettant pour c' sa valeur, il vient:

$$t=K\alpha \text{ arc}(\cos=z)-\alpha\sqrt{1-z^2}\{Z_0-Z_1z+Z_2z^2\ldots\}.$$

Les quantités Z_0, Z_1, $Z_2\ldots$ dépendent les unes des autres: en effet, on a généralement:

$$Z_r=\frac{1}{r+1}B_{r+1}+\frac{1.r+2}{r+1.r+3}B_{r+3}+\ldots,$$

et

$$Z_{r+2}=\frac{1}{r+3}B_{r+3}+\frac{1.r+4}{r+3.r+5}B_{r+5}+\ldots;$$

ainsi:

$$Z_r=\frac{1}{r+1}B_{r+1}+\frac{r+2}{r+1}Z_{r+2};$$

d'où

$$Z_{r+2}=\frac{r+1}{r+2}Z_r-\frac{1}{r+2}B_{r+1}:$$

de plus $Z_1=K-1$: il suffit donc de former K et Z_0.

Remettant pour B_1, $B_2\ldots$ leurs valeurs, on a:

$$K=1-\frac{1}{2}A_2-\frac{1.3}{2.4}A_4\ldots+\frac{1}{2}A'_2m^2\left\{1-\frac{3}{4}A_2-\frac{3.5}{4.6}A_4\ldots\right\}$$
$$+\frac{1.3}{2.4}A'_4m^4\left\{1-\frac{5}{6}A_2\ldots\right\}+\ldots,$$

et $$Z_0=A'_1m\left\{1-\frac{1.2}{1.3}A_2-\frac{1.2.4}{1.3.5}A_4\ldots\right\}$$
$$+\frac{1.2}{1.3}A'_3m^3\left\{1-\frac{4}{5}A_4\ldots\right\}+\frac{1.2.4}{1.3.5}A'_5m^5\{1-\ldots\}+\ldots$$

Il est facile de s'assurer que les coefficiens des diverses puissances de m forment une suite convergente; il en sera donc de même de ces séries, puisque $m<1$.

Remettant pour α et z leurs valeurs, il vient:

$$t=\frac{2Kl}{\sqrt{2a^2-8gl}}\theta-\frac{2l}{\sqrt{2a^2-8gl}}\sin\theta\{Z_0-Z_1\cos\theta+Z_2\cos^2\theta\ldots\}.$$

Cette équation jointe à celles (4), (5), (6) et (8) complette la solution du probléme dans le cas qui nous occupe. En y faisant $\theta = 0, = 2\pi, = 4\pi, \ldots$, on trouve :

$$t = 0, \quad = \frac{4K\pi l}{\sqrt{2a^2 - 8gl}} = T, \quad = \frac{8K\pi l}{\sqrt{2a^2 - 8gl}}, = \ldots$$

$$x = x' = 0, \quad = \frac{aT}{2} = X, \quad = \frac{2aT}{2}, = \ldots$$

et constamment $y' = l$, $\frac{dx'}{dt} = 0$, $\frac{dy'}{dt} = 0$ et $\frac{dx}{dt} = a$. Ainsi, comme l'a fait voir la discussion générale, le mouvement est périodique; de plus, le tems d'une période est $\frac{4K\pi l}{\sqrt{2a^2 - 8gl}}$. Enfin, il est facile de s'assurer qu'en désignant par $t_1, y'_1, x'_1 \ldots$; $t_2, y'_2, x'_2 \ldots$ les valeurs de $t, y', x' \ldots$, correspondantes à $\theta = \theta_1$ et $\theta = 2\pi - \theta_1$, on a :

$$t_2 = T - t_1, \quad y'_2 = y'_1, \quad x'_2 = X - x'_1, \quad x_2 = X - x_1,$$

$$\frac{d\theta_2}{dt_2} = \frac{d\theta_1}{dt_1}, \quad \frac{dx'_2}{dt_2} = \frac{dx'_1}{dt_1'} \text{ et } \frac{dx_2}{dt_2} = \frac{dx_1}{dt_1};$$

d'où résulte que la trajectoire décrite durant une période, par l'extrémité du pendule, est symétrique par rapport à la verticale, dont l'abscisse est $\frac{X}{2}$ direction du pendule au milieu de la période, et que les circonstances du mouvement se retrouvent les mêmes pour deux positions symétriques par rapport à cette verticale.

La supposition de $a^2 = 8gl$ donne $m = 1$, et fait changer de forme l'expression de dt; en effet, on a alors :

$$dt = -a\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}z^2}\,dz}{\sqrt{1+z}\sqrt{1-z^2}} = -a\frac{\sqrt{1 - \frac{1}{2}z^2}\,dz}{(1+z)\sqrt{1-z}};$$

mettant pour $\sqrt{1 - \frac{1}{2}z^2}$ son développement déja employé, il vient :

$$dt = -a\left\{1 - A_2z^2 - A_4z^4 - \ldots\right\}\frac{dz}{(1+z)\sqrt{1-z}}.$$

Conformément à une méthode connue, due à Lagrange, nous intégrerons la fonction :

$$\frac{dz}{(1+z)\sqrt{1-z}}\cdot\frac{1}{1-az}=\frac{dz}{(1-az)(1+z)\sqrt{1-z}},$$

nous développerons son intégrale par rapport à a, et nous remplacerons les puissances de cette lettre par les coefficiens des puissances correspondantes de z. Posant $\sqrt{1-z}=u$, la fraction proposée devient :

$$\frac{-2du}{(1-a+au^2)\ (2-u^2)}=-\frac{1}{1-a}\cdot\frac{du}{(1+\alpha' u^2)\ (1-\alpha'' u^2)},$$

en faisant $\frac{a}{1-a}=\alpha'$ et $\alpha''=\frac{1}{2}$; mais

$$\frac{du}{(1+\alpha' u^2)(1-\alpha'' u^2)}=\frac{1}{\alpha'+\alpha''}\left\{\frac{\alpha'}{1+\alpha' u^2}+\frac{\alpha''}{1-\alpha'' u^2}\right\},$$

et

$$\int\frac{\alpha' du}{1+\alpha' u^2}=\sqrt{\alpha'}\,\text{arc}\left(\text{tang}=u\sqrt{\alpha'}\right),\quad\int\frac{\alpha'' du}{1-\alpha'' u^2}=-\int\frac{-\alpha'' du}{1-\alpha'' u^2}$$

$$=-\sqrt{-\alpha''}\,\text{arc}\left(\text{tang}=u\sqrt{-\alpha''}\right)=-\frac{1}{2}\sqrt{\alpha''}\,\text{l}\left\{\frac{1-u\sqrt{\alpha''}}{1+u\sqrt{\alpha''}}\right\},$$

puisqu'en général :

$$2x\sqrt{-1}=\text{l}\left\{\frac{1+\text{tang}\,x\sqrt{-1}}{1-\text{tang}\,x\sqrt{-1}}\right\}.$$

Remettant pour α' et α'' leurs valeurs, il vient pour l'intégrale de la fraction proposée :

$$-\frac{2}{1+a}\left\{\sqrt{\frac{a}{1-a}}\,\text{arc}\left(\text{tang}=u\sqrt{\frac{a}{1-a}}\right)-\frac{1}{2\sqrt{2}}\,\text{l}\left(\frac{\sqrt{2}-u}{\sqrt{2}+u}\right)\right\}+C:$$

la constante est nulle; car on doit avoir à l'origine $t=0$ et $z=1$, ou $u=0$. Il resterait à développer ce résultat suivant les puissances de a; mais vu l'indépendance de u et de a, on peut déduire de cette expression même des valeurs particulières de l'intégrale. Faisant $z=-1$, ce qui correspond à $\theta=\pi$, et donne $u=\sqrt{2}$, le terme affecté de logarithmes devient infini; ainsi la valeur correspondante de t est infinie comme nous l'avions annoncé. Nous

ne nous arrêterons pas davantage sur ce cas qui ne présente d'ailleurs que cette seule particularité.

Venons enfin à celui de $a^2 < 8gl$, qui donne $m > 1$, ce qui rend divergentes les séries employées dans la première solution. Faisons dans l'expression primitive de dt, $\frac{a^2 - 4gl}{4gl} = \frac{1}{m} = m'$, elle devient :

$$dt = \frac{l\sqrt{1+\sin^2\theta}\,d\theta}{2\sqrt{gl}\sqrt{m'+\cos\theta}} = -\sqrt{\frac{l}{2g}} \cdot \frac{\sqrt{1-\frac{1}{2}z^2}\,dz}{\sqrt{m'+z}\sqrt{1-z^2}}:$$

changeant dans le développement de $(1+mx)^{-\frac{1}{2}}$, mx en $-z^2$, on en tire :

$$(1-z^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + A'_1 z^2 + A'_2 z^4 + A'_3 z^6 + \ldots$$

Multipliant ce développement par celui de $\left(1 - \frac{1}{2}z^2\right)^{\frac{1}{2}}$ déja employé, on a :

$$1 + z^2(A'_1 - A_2) + z^4(A'_2 - A'_1 A_2 - A_4)$$
$$+ z^6(A'_3 - A'_2 A_2 - A'_1 A_4 - A_6) + \ldots,$$

série que nous représenterons par $1 + B'_2 z^2 + B'_4 z^4 + \ldots$, ce qui donne :

$$t = -\sqrt{\frac{l}{2g}}\left\{\int\frac{dz}{\sqrt{m'+z}} + B'_2\int\frac{z^2 dz}{\sqrt{m'+z}} + \ldots\right\}.$$

Posant $m' + z = u^2$ pour rendre ces intégrales rationnelles, et intégrant par les méthodes connues, il vient :

$$t = c' - \sqrt{\frac{2l}{g}}\,u\left\{1 + B'_2\left(\frac{u^4}{5} - \frac{2u^2}{3}m' + m'^2\right)\right.$$
$$\left. + B'_4\left(\frac{u^8}{9} - \frac{4}{7}u^6 m' + \frac{6}{5}u^4 m'^2 - \frac{4}{3}u^2 m'^3 + m'^4\right) + \ldots\right\}.$$

Remettons pour u sa valeur, la série que renferme t, deviendra :

$$\left.\begin{array}{l} 1 + B'_2\left\{\frac{(m'+z)^2}{5} - \frac{2}{3}(m'+z)\,m' + m'^2\right\} \\ + B'_4\left\{\frac{(m'+z)^4}{9} - \frac{4}{7}(m'+z)^3 m' + \ldots\right\} + \ldots, \end{array}\right\} \quad (a)$$

expression qui a pour terme général :

$$B'_n\left\{\frac{1}{2n+1}(m'+z)^n-\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{2n-1}(m'+z)^{n-1}m'\ldots\right.$$
$$\left.\pm N.\frac{1}{2n-2k+1}(m'+z)^{n-k}m'^k\ldots\right\},\qquad (b)$$

N représentant le coefficient connu du binome. Développons (b) suivant les puissances de z par le théorème de Mac-Laurin. Pour cela, faisons $z=0$ dans cette fonction et ses coefficiens différentiels, ce qui donnera, en faisant abstraction du facteur commun B'_n, les expressions :

$$m'^n\left\{\frac{1}{2n+1}-\frac{n}{1}\,\frac{1}{2n-1}\ldots\pm\frac{N}{2n-2k+1}\right\},$$
$$m'^{n-1}\left\{\frac{n}{2n+1}-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2n-1}\ldots\pm\frac{N.n-k}{2n-2k+1}\right\},$$
$$m'^{n-2}\left\{\frac{n.n-1}{2n+1}-\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1.n-2}{2n-1}\ldots\right\}\ldots,$$

que nous représenterons respectivement par m'^nS_n, $m'^{n-1}S'_n$, $m'^{n-2}S''_n\ldots$, ce qui donne pour le développement de (b),

$$B'_n\left\{m'^nS_n+m'^{n-1}S'_n\frac{z}{1}+m'^{n-2}S''_n\frac{z^2}{1.2}\ldots\right\}.$$

On en déduit celui de (a), en faisant successivement $n=2$, $=4$, $=6\ldots$, et on a la série :

$$1+B'_2m'^2S_2+B'_4m'^4S_4\ldots$$
$$+\frac{z}{1}\{B'_2m'S'_2+B'_4m'^3S'_4\ldots\}+\frac{z^2}{1.2}\{B'_2S''_2+B'_4m'^2S''_4\ldots\}.$$

Examinons la loi des quantités S_n, $S_{n+2}\ldots S'_n$, $S'_{n+2}\ldots S''_n$, $S''_{n+2}\ldots$, et pour cela, considérons-les comme provenant de la fonction

$$\frac{x^n}{2n+1}-\frac{n}{1}\,\frac{x^{n-1}}{2n-1}\ldots\pm\frac{Nx^{n-k}}{2n-2k+1},$$

et de ses coefficiens différentiels, en y faisant $x=1$. Il est facile de s'assurer qu'on a, en désignant par s_n la valeur générale de cette fonction :

$$2s_nx^{\frac{1}{2}}=\int x^{-\frac{1}{2}}(x-1)^ndx$$
$$=\frac{2x^{\frac{1}{2}}(x-1)^n-2n\int x^{-\frac{1}{2}}(x-1)^{n-1}dx}{2n+1}=\frac{2x^{\frac{1}{2}}(x-1)^n}{2n+1}-\frac{4n}{2n+1}x^{\frac{1}{2}}s_{n-1},$$

en observant qu'on a également $2 s_{n-1} x^{\frac{1}{2}} = \int x^{-\frac{1}{2}} (x-1)^{n-1} dx$. On a donc, en général :

$$s_n = \frac{(x-1)^n}{2n+1} - \frac{2n}{2n+1} s_{n-1}, \quad s'_n = \frac{n(x-1)^{n-1}}{2n+1} - \frac{2n}{2n+1} s'_{n-1},$$

$$\text{et} \quad s^k_n = \frac{n.n-1\ldots n-k+1}{2n+1} (x-1)^{n-k} - \frac{2n}{2n+1} s^k_{n-1}.$$

Il en résulte entre les valeurs correspondantes à $x=1$, les relations :

$$S_n = -\frac{2n}{2n+1} S_{n-1} \ldots \quad S^k_n = -\frac{2n}{2n+1} S^k_{n-1}.$$

Cette dernière n'a lieu que jusqu'à $k=n-1$, car pour $k=n$, la supposition de $x=1$ ne ferait plus disparaître de l'expression de s^k_n, le terme en $x-1$, dont l'exposant serait nul. Changeant n en $n-1$, il vient :

$$S_{n-1} = -\frac{2(n-1)}{2n-1} S_{n-2}, \quad \text{d'où } S_n = \frac{4n.n-1}{(2n+1)(2n-1)} S_{n-2},$$

de même
$$S^k_n = \frac{4n.n-1}{(2n+1)(2n-1)} S^k_{n-2},$$

et cette dernière n'a lieu, d'après la remarque précédente, que jusqu'à $k=n-2$. Le coefficient $\frac{4n.n-1}{(2n+1)(2n-1)}$ étant une fraction, il en résulte que les quantités $S_2, S_4 \ldots S'_2, S'_4 \ldots$ forment des suites décroissantes. Il serait, en outre, facile de conclure des expressions ci-dessus, que S^k_n est positif ou négatif suivant que k est pair ou impair.

On vient de voir que les séries qui entrent dans le développement de (a) sont convergentes ; il en est de même de ce développement. En effet, trois termes consécutifs ont pour expression, en supposant k pair :

$$\frac{z^k}{1.2\ldots k} \{B'_k S^k_k + B'_{k+2} m'^2 S^k_{k+2} \ldots\},$$

$$\frac{m' z^{k+1}}{1.2\ldots k+1} \{B'_{k+2} S^{k+2}_{k+2} + \ldots\}, \quad \frac{z^{k+2}}{1.2\ldots k+2} \{B'_{k+2} S^{k+2}_{k+2} + \ldots\},$$

et on peut s'assurer que les coefficiens de z, forment une suite plus convergente que les quantités...

$$\frac{1}{1.2\ldots k} S_k^k, \quad \frac{1}{1.2\ldots k+1} S_{k+2}^{k+1}, \quad \frac{1}{1.2\ldots k+2} S_{k+2}^{k+2},$$

qui d'après les formules ci-dessus, se changent en

$$\frac{1}{2k+1}, \quad -\frac{2(k+2)}{(2k+5)(2k+3)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2k+5},$$

expressions qui vont en décroissant. Il résulte donc de cette discussion que les séries employées sont convergentes, et qu'on peut représenter le développement de (e) par $Z'_0 - Z'_1 z + Z'_2 z^2 - \ldots$

Il vient ainsi :

$$t = c' - \sqrt{\frac{2l}{g}} \sqrt{\frac{a^2 - 4gl}{4gl} + z} \left\{ Z'_0 - Z'_1 z + Z'_2 z^2 \ldots \right\},$$

à l'origine $t = 0$, $z = 1$, par conséquent :

$$c' = \frac{a}{g\sqrt{2}} \left\{ Z'_0 - Z'_1 + Z'_2 \ldots \right\},$$

quantité nécessairement finie, puisque la série qui l'exprime est convergente et a ses signes alternatifs. Laissant c', pour abréger, et remettant au lieu de z sa valeur $\cos\theta$, il vient, pour remplacer l'équation (7), dans le cas qui nous occupe :

$$t = c' - \frac{1}{g\sqrt{2}} \sqrt{a^2 - 4gl + 4gl\cos\theta} \left\{ Z'_0 - Z'_1 \cos\theta + Z'_2 \cos^2\theta \ldots \right\}.$$

Cette équation supposant $\frac{d\theta}{dt}$ positif, ne devra être employée, d'après ce qu'a fait connaître la discussion générale, que jusqu'à la valeur $\theta = \Theta$, donnée par l'équation $a^2 - 4gl + 4gl\cos\theta = 0$, et pour laquelle $t = c'$. Après avoir acquis cette valeur, θ diminue : il faut donc changer la signe du radical, et employer la formule :

$$t = c' + \frac{1}{g\sqrt{2}} \sqrt{a^2 - 4gl + 4gl\cos\theta} \left\{ Z'_0 - Z'_1 \cos\theta + Z'_2 \cos^2\theta \ldots \right\},$$

jusqu'à $\theta = 0$, qui donne $t = 2c'$, pour l'intervalle de tems écoulé entre deux passages consécutifs par la verticale. Enfin θ devenant négatif, on devra changer dans les deux formules θ en $-\theta$, et par suite $d\theta$ en $-d\theta$, ce qui conduit aux mêmes équations, mais en ordre inverse, et donne encore l'intervalle de tems $2c'$ jusqu'au retour à la verticale, après lequel le mouvement recommence comme à l'origine. Le tems d'une période est $T = 4c'$, et le point de

suspension décrit pendant chacune d'elles un espace $X = 2ac'$. De plus, les branches de courbe décrites de $\theta = 0$ à $\theta = \Theta$ et de $\theta = \Theta$ à $\theta = 0$, sont respectivement semblables à celles qui le sont de $\theta = -\Theta$ à $\theta = 0$, et de $\theta = 0$ à $\theta = -\Theta$; mais elles se trouvent placées symétriquement à l'égard de la verticale, dont l'abscisse est $\frac{X}{2}$, direction du pendule au milieu de la période; ainsi la trajectoire elle-même est symétrique par rapport à cette verticale. Enfin, pour des positions du pendule, correspondantes à des points semblablement placés sur les branches de trajectoire semblables, les valeurs de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dz'}{dt}$ et $\frac{dy'}{dt}$ se retrouvent les mêmes, et celles de $\frac{d\theta}{dt}$ sont égales, mais de signes contraires.

Des tangentes aux projections des courbes à double courbure. Examen des cas particuliers où la méthode graphique, d'après laquelle on mène ces tangentes, est en défaut; par M. Hachette.

La tangente en un point d'une courbe qui résulte de la pénétration de deux surfaces, est évidemment la droite d'intersection de deux plans, dont chacun passe par le point de la courbe, et touche l'une des deux surfaces; les projections de cette droite sont les tangentes des projections de la courbe d'intersection des deux surfaces. La détermination de ces tangentes dépend donc de l'intersection de deux plans. Toutes les fois que cette intersection sera perpendiculaire au plan de projection, sa projection se confondra avec le point de la courbe pour lequel on demande la tangente, et la direction de cette tangente ne sera pas déterminée : en voici deux exemples tirés des épures de coupe des pierres, relatives à deux voûtes, l'une qu'on nomme *Porte droite, rachetant un berceau cylindrique*, l'autre *Porte biaise, en tour ronde, rachetant un berceau spherique*. Dans la première, deux cylindres droits, horisontaux, dont les axes (fig. 2, pl. 1) *AB*, *AC* se coupent à angle droit au point *A*, et qui ont pour bases les cercles des rayons *CD*, *BE*, se pénètrent, et la projection de la courbe d'intersection sur le plan horisontal des axes, est composée de deux branches égales *LMN*, *L'M'N'*. Les quatre points *L*, *N*, *L'*, *N'* de cette courbe, situés dans le plan des axes, sont ceux pour lesquels la droite d'intersection des plans

tangens aux deux cylindres, est perpendiculaire au plan, qui contient ces points. Dans l'épure relative à la porte biaise, rachetant un berceau sphérique, un cylindre droit horisontal pénètre une sphère, dont le centre O (fig. 3) est sur le plan horisontal mené par l'axe AC du cylindre; la projection de la courbe d'intersection sur ce plan, est composée de deux branches égales LMN, $L'M'N'$; la méthode ordinaire des tangentes est encore en défaut pour les quatre points L, N, L', N' de cette courbe, situés dans le plan horisontal de projection.

L'étude de la coupe des pierres ayant pour objet d'exercer les élèves de l'Ecole Polytechnique au dessin du trait et aux applications des théories mathématiques, je fais voir comment on prolonge indéfiniment les lignes LMN, $L'M'N'$ (fig. 2 et 3), dont le tracé graphique ne donne que des portions détachées, et par quel moyen on construit les droites qui touchent ces lignes, aux points de la courbe d'intersection des deux surfaces, tels que L, N, L', N'.

Prenant (fig. 2) les axes AB, AC des surfaces cylindriques pour axes des coordonnées, les équations de ces surfaces se réduisent à celles de leurs bases qu'on peut supposer dans les plans des xz et des yz. Les bases étant des cercles, les équations de ces cercles seront, en nommant r et R leurs rayons :

$$x^2 + z^2 = r^2, \quad y^2 + z^2 = R^2.$$

Eliminant z^2 entre ces équations, on a pour la projection de la ligne d'intersection des deux cylindres, $y^2 - x^2 = R^2 - r^2$; équation d'une hyperbole équilatère, dont le paramètre constant est $R^2 - r^2$. Ainsi deux autres cylindres concentriques aux premiers, et des rayons R', r' se couperont suivant une courbe, dont la projection horisontale ne changera pas, pourvu qu'on ait :

$$R'^2 - r'^2 = R^2 - r^2.$$

Ayant pris pour r' une droite quelconque CF, l'arête du premier cylindre, passant par le point F, devra couper le second cylindre du rayon R', en un point dont la projection horisontale est M. Menant donc par ce point M l'horisontale MC', et par le point C' la verticale $C'F'$ égale à CF, la droite BF' sera le rayon R' du second cylindre qui coupera le premier du rayon $CF = r'$, suivant une courbe dont la projection horisontale sera comme pour les cylindres des rayons R et r, composée des branches LMN, $L'M'N'$, prolongées jusqu'aux points l, n, l', n'.

Considérant les points L, N, L', N' comme les projections de points appartenant aux cylindres des rayons R', r'; on déterminera les tangentes pour ces points par la méthode ordinaire, c'est-à-dire, par l'intersection des plans tangens à ces deux cylindres.

Passons maintenant à l'examen de la courbe *LMN*, *L'M'N'* (fig. 5), projection de l'intersection du cylindre et de la sphère. Prenant pour origine des coordonnés le centre *O* de la sphère, et pour axe des *y* une parallèle à l'axe *AC* du cylindre; on a pour les équations de ces deux surfaces :

$$x^2+y^2+z^2=R^2; \qquad (x-a)^2+z^2=r^2.$$

R est le rayon de la sphère; *r* le rayon du cylindre, et *a* la distance *OA* de l'axe *AC* au centre *O* de la sphère.

Eliminant z^2 entre ces deux équations, on a pour la projection de la courbe d'intersection sur le plan des *xy*,

$$y^2=R^2-r^2+a^2-2ax;$$

équation d'une parabole, dont le sommet *S* est sur l'axe des *x*, à une distance *OS* du centre *O* de la sphère, égale à $\frac{R^2-r^2+a^2}{2a}$. Cette parabole ne cessera pas d'appartenir à la projection de la courbe d'intersection de sphères concentriques au point *O*, et de cylindres ayant pour axe la droite *AC*, pourvu que la quantité R^2-r^2 soit constante. On satisfera à cette condition, en mettant le point dont *M* est la projection sur le plan horisontal des *xy*, à la même distance de ce plan, tant sur le nouveau cylindre que sur la nouvelle sphère correspondante.

Soit *CF* le rayon arbitraire *r'* du nouveau cylindre; ayant élevé la perpendiculaire *MF'* à la droite *OM*, et prenant *MF'* = *CF*, *OF'* sera le rayon *R'* de la sphère qui coupera le cylindre suivant une ligne, dont la projection donnée *LMN*, *L'M'N'*, se prolongera jusqu'aux points *l*, *n*, *l'*, *n'*. Considérant la sphère du rayon *R'* et le cylindre du rayon *r'*, on détermine par la méthode ordinaire, les tangentes aux points *L*, *N*, *L'*, *N'*. On peut encore déterminer ces tangentes par une considération nouvelle, celle des plans normaux aux courbes à double courbure, comme on va le voir par l'article suivant de M. Binet.

Remarque sur la construction graphique des tangentes aux projections des courbes; par M. J. Binet.

Lorsqu'une courbe résulte de l'intersection de deux surfaces, on fait ordinairement dépendre la détermination de la tangente en un de ses points, de celle des plans tangens à ces surfaces; car l'intersection de ces plans est en effet la tangente demandée (Géo-

métrie descriptive de M. Monge, n°. 58). Il est visible que cette tangente est perpendiculaire à-la-fois aux deux normales aux surfaces proposées, et par conséquent elle est perpendiculaire à leur plan : ainsi le plan des deux normales aux surfaces est le plan normal à la courbe de leur intersection. Toutes les fois que ce plan sera d'une facile construction, le problême de déterminer la tangente à la courbe proposée, se ramènera par cette considération à conduire une perpendiculaire à ce plan : c'est ce qui a lieu dans le tracé de plusieurs épures.

Si l'on veut déterminer la tangente en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces de révolution, dont les axes soient, ou ne soient pas dans le même plan; ayant pris un des plans de projection parallèle aux deux axes, et l'autre plan de projection perpendiculaire à l'un d'eux, la détermination des deux normales et de leur plan sera très-simple, et elle conduira immédiatement à celle de la tangente aux deux surfaces.

A ce cas général se rapporte la détermination de la courbe d'intersection des deux surfaces cylindriques, *de la porte droite rachetant un berceau*. Du point assigné sur la courbe, il suffit d'abaisser des perpendiculaires sur les axes des cylindres droits en question, et de joindre par une droite les points où ces perpendiculaires rencontrent les axes; cette droite est la trace du plan normal sur le plan horisontal des deux axes, et la perpendiculaire à cette trace, abaissée du point donné de la projection de la courbe, est la tangente. Cette construction s'applique même aux points de la courbe (tels que N, fig. 2), qui résultent de l'intersection des génératrices comprises dans le plan horisontal des deux axes, points pour lesquels la construction ordinaire, fondée sur l'intersection des traces des plans tangens, se refuse à faire connaître la direction de la courbe en projection horisontale.

Dans la *porte biaise, en tour ronde, rachetant un berceau sphérique*, la douelle de la porte est terminée d'une part au cône droit extérieur, et d'une autre part à la sphère intérieure. (Dans tout ceci, je m'occupe des épures qui font partie du cours de l'Ecole, et je suppose qu'on ait ces épures sous les yeux, ou seulement les fig. 2, 3, pl. 1.) On pourra mener à ces surfaces leurs normales, au moyen desquelles on aura avec la plus grande facilité les tangentes aux deux courbes qui comprennent la douelle de la porte.

La considération du plan normal présente encore quelqu'avantage dans la tracé de la tangente à *la roulette sphérique*, qui est la courbe que décrit un point invariablement lié à un cône arbitraire, qui roule sans glisser sur un cône fixe aussi quelconque, ces deux cônes ayant constamment le même sommet. On prouve

aisément que la courbe a pour plan normal le plan conduit par la génératrice de contact des deux cônes, et par le point pris sur la courbe. La *roulette sphérique* devient *l'épicycloïde sphérique*, lorsque les deux cônes arbitraires se changent en cônes droits. Alors prenant, comme l'a fait M. Hachette (Correspondance, tom. II, ou Supplément à la géométrie descriptive, pag. 88), pour exécuter les projections, le plan de la base du cône fixe, et le plan conduit par son axe et par la génératrice de contact des cônes, cette dernière droite sera précisément l'une des traces du plan normal. Menant donc à cette trace, et par le point proposé une parallèle, en cherchant le point où elle perce le plan de la base du cône invariable, ce point-là devra encore appartenir à la seconde trace du plan normal. Deux perpendiculaires à ces traces menées par les projections du point décrit sur la courbe, seront les projections de la tangente.

Solution graphique de l'équation du troisième degré, $x^3 - px - q = 0$; *par M.* MONGE.

L'équation proposée résulte de l'élimination de y entre les deux équations :

$$y = x^3, \qquad y = px + q;$$

l'une est la parabole cubique, dont les ordonnées y sont les cubes des abscisses x; l'autre représente une droite, dont la position est déterminée par les constantes p et q. Ayant construit ces deux lignes, les abscisses x des points où elles se coupent, sont évidemment les racines de l'équation proposée.

Soient (fig. 4, pl. 1) AX, AY les axes des x et des y; AMB la portion de parabole cubique qui correspond à une abscisse donnée, par exemple, 4 centimètres. L'ordonnée A (64) du point B est de 64 centimètres; la branche de parabole cubique qui correspond à la même abscisse prise négativement est $A'B'$. Ces deux branches ont un point d'inflexion en A, et ce point en est le centre. Une ligne droite telle que MN coupe la branche AB en un point M, et ne rencontre pas la branche $A'B'$. Dans ce cas, l'équation proposée n'a qu'une racine, et cette racine est égale à l'abscisse du point M. Si la droite de l'équation $y = px + q$, coupe les deux branches AB, $A'B'$ en trois points L', M', N', les abscisses de ces points sont les trois racines réelles de l'équation proposée.

Lorsque la droite proposée ne rencontrera aucune des deux portions AB, AB' de la parabole cubique, on prolongera la parabole

cubique au delà des points B et B', en cherchant les abscisses positives des points compris entre les ordonnées 1×64 et 2×64, 2×64 et 3×64, 3×64 et 4×64, et ainsi de suite, jusqu'à la portion comprise entre les ordonnées 15×64 et 16×64; de cette manière, les portions de la parabole cubique correspondent a des parties égales de l'axe des y, et si l'on suppose que ces parties soient ramenées sur la première A (64), la dernière portion UV aura pour ordonnées des points extrêmes U et V, 63×66 et 64×64, les abscisses de ces points étant $4\sqrt[3]{63}$ et 16. Par cette construction, on obtiendra dans un rectangle de 16 centimètres sur 64, la branche de parabole cubique, dont la dernière ordonnée positive est de 40,96 mètres.

Les ordonnées étant :

$$1\times 64^{\text{cent.}},\quad 2\times 64^{\text{c.}},\quad 3\times 64^{\text{c.}}\ldots,\quad 64\times 64^{\text{c.}},$$

les abscisses correspondantes, seront :

$$4,\quad 4\times\sqrt[3]{2},\quad 4\times\sqrt[3]{3}\ldots,\quad 16.$$

Il est évident que les dernières branches de la courbe différeront très-peu de la ligne droite : la dernière, par exemple, comprise entre les ordonnées 63×64 et 64×64, a pour abscisses correspondantes de ces ordonnées, 16 et $4\sqrt[3]{15}$, dont la différence est à très-peu près d'un millimètre.

La droite représentée par l'équation $y - px = q$, coupe l'axe des x, et ses parallèles menées par les points de division 0×64, 2×64,... 64×64 de l'axe des y ; les portions de la droite comprises entre ces parallèles sont toutes égales entre elles et de même direction ; il sera donc facile, après avoir ramené chacune de ces portions entre l'axe des abscisses, et la parallèle à cet axe menée par le point (64) de l'axe de y, de reconnaître les points d'intersection de la droite proposée et de la parabole cubique.

La fig. 4, pl. 1, tracée dans le cadre $KLMN$, représente sur une échelle d'un millimètre pour centimètre le dessin de la parabole, dont les ordonnées sont égales aux cubes des abscisses prises positivement et négativement, depuis 0 jusqu'à 16 centimètres. La planche de ce dessin (*) a été gravée avec le plus grand soin, par les artistes de la commission d'Egypte ; les parallèles ont été

(*) Ce dessin gravé, se vend à part, chez Mme. Ve. Courcier, quai des Grands-Augustins, no. 57.

tracées avec la machine *conté*, et la courbe a été dessinée par M. Girard. La distance des abscisses positive et négative, qui correspondent aux points extrêmes de cette courbe, mesurée sur l'axe des y, est réellement de 81,92 mètres ; cette distance est ramenée sur la planche gravée, à une dimension 64 fois plus petite, 1,28 mètre.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Solutions de ces deux questions,

1°. *Construire par la règle et le compas l'intersection d'une droite, et d'une surface gauche du second degré ; 2°. construire un cercle tangent à trois cercles donnés dans un plan; par M.* Dandelin, *élève.*

Solution du premier problème.

Soit (fig. 1, pl. 2), acb une hyperbole, et AB, AC ses asymptotes; menons la corde bc, terminée en B et en C aux asymptotes. Soit de plus An le diamètre conjugué à la corde bc; ce diamètre coupera en deux également la corde bc, et par conséquent BC. Si donc par le point b nous menons bc' parallèle à AB, et bb' parallèle à AC, que nous fassions la même chose pour le point c, nous construirons de cette manière un parallélogramme, dont la diagonale $b'c'$ se confondra avec le diamètre An. Cela est évident.

Imaginons maintenant que a, b, c soient trois points d'une hyperbole, et que nous connaissions les directions $A'B'$ et $A'C'$ des asymptotes de cette hyperbole ; nous pourrons aisément trouver la vraie position des asymptotes ; en effet, sur les points a, b construisons un parallélogramme $aa''bb''$, dont les côtés soient parallèles aux directions données des asymptotes ; d'après ce que nous venons de dire, la diagonale $a''b''$ sera un diamètre. Sur b, c construisons un autre parallélogramme $bb'cc'$, dont les côtés soient aussi parallèles aux directions données, et la diagonale $b'c'$ sera encore un diamètre. L'intersection A de ces deux diagonales est le centre de l'hyperbole, et si l'on même AB parallèle à $A'B'$ et AC à $A'C'$, on aura ses asymptotes.

Si maintenant on donnait une droite EF, et qu'on voulût construire les points d'intersection de cette droite et de l'hyperbole, cela serait fort aisé. Menons par le point a la corde kai parallèle à EF, et supposons que z soit un des points cherchés. Nous aurons par une propriété connue de l'hyperbole $ka.ai = Ez.Fz$, et il n'y

a plus pour trouver le point z qu'à diviser EF en deux parties, dont le produit soit donné. J'ai tracé la construction sur la figure.

Nous avons donc le moyen de construire à l'aide de la règle et du compas, l'intersection d'une droite et d'une hyperbole, lorsque nous ne connaissons de celle-ci que trois points, et la direction des asymptotes. Or c'est à ce dernier problème que se réduira toujours la solution de celui concernant les surfaces gauches du second degré, qui sont, comme l'on sait, engendrées par une droite mobile, qui s'appuie sur trois autres droites fixes, qu'on nomme *directrices*. En effet, concevons par une des trois directrices données un plan parallèle à la droite donnée; ce plan coupera la surface suivant deux droites que nous appelerons A et A', et dont l'une sera la directrice elle-même. Aprésent par la droite donnée, menons un plan parallèle aux droites A et A', il coupera la surface suivant une hyperbole, dont les asymptotes sont parallèles à A et A'. (Voyez le Supplément de la Géométrie descriptive; par M. Hachette, pag. 75, art. 84). Il sera facile de trouver trois points de cette hyperbole, c'est-à-dire, trois points d'intersection de son plan et de la surface gauche, et alors le problême sera résolu, puisqu'il n'y aura plus qu'à construire l'intersection de cette hyperbole et de la droite donnée, et qu'on aura tous les élémens nécessaires, savoir : trois points de la courbe et la direction de ses asymptotes.

Solution du second problême.

Etant donnés trois cercles c, c', c'' (fig. 2, pl. 2), *trouver une quatrième circonférence qui leur soit tangente.*

Imaginons que l'on ait pris ces cercles pour les grands cercles de trois sphères que nous appelerons aussi c, c', c'', et le problême se réduira à mener une sphère tangente à trois autres, et dont le centre soit dans le plan du triangle $cc'c''$, fig. 2.

Supposons cette sphère trouvée; elle touchera en a, a', a'' les trois sphères données, et ces trois points seront précisément les points de contact du cercle demandé et des autres cercles.

Menons un plan tangent aux trois sphères, et soit $AA'A''$ l'intertersection de ce plan et du plan $cc'c''$. On sait (Supplément à la Géométrie descriptive, n°. 28), que parmi les quatre séries de sphères tangentes à c, c', c'', il y en a une correspondante à la ligne AA''. Supposons encore que ce soit dans cette série que nous ayons pris la sphère tangente, et voyons quelles conditions remplissent ses divers élémens.

Soient b, b', b'' les points de contact du plan tangent mené par la droite $AA'A''$ et des trois sphères; d'abord (Supplément de la Géométrie descriptive, et par abréviation, S. G., n°. 59), les six

points b, b', b'', a, a', a'', seront sur une même sphère. Cette sphère sera coupée, 1°. par le plan tangent suivant un de ses petits cercles, lequel passera par b, b' et b''; 2°. par le plan $cc'c''$ suivant un autre cercle, lequel sera précisément le grand cercle $aa'a''$ de la sphère tangente cherchée. Par les cercles $aa'a''$, $bb'b''$, on peut donc (S. G., n°. 64) faire passer une surface conique. Voyons comment on peut déterminer le sommet de cette surface.

Prenons sur la droite $AA'A''$, les sommets A et A' des cônes tangens, le premier aux sphères c' et c'', le second aux sphères c et c''. Les quatre points a', b', a'', b'' se trouvent sur un même plan passant par A'; les quatre points a'', b'', a, b se trouvent aussi sur un même plan passant par A. (S. G., n°. 30). Les quatre points a, b, a', b' se trouvent sur un troisième plan passant par le point A'', sommet du cône tangent à c et c'. Ces trois plans se coupent en un point S, qui est le sommet du cône cherché; ce point S se trouve sur la rencontre des trois intersections de ces plans, pris deux à deux, c'est-à-dire sur la rencontre des lignes ab, $a'b'$, $a''b''$. Si donc, nous faisons passer par le cercle connu $bb'b''$, un cône dont le sommet soit en S, ce cône coupera la sphère qui passe par les cercles $aa'a''$ et $bb'b''$, suivant un cercle $aa'a''$, sur lequel se trouveront les points cherchés $aa'a''$.

Maintenant imaginons une tangente aT commune aux deux cercles c et $aa''a'$; par cette tangente que nous appellerons aT, et par le point S, faisons passer un plan aST. Ce plan sera tangent au cône, et par conséquent il coupera le plan du cercle $bb'b''$, suivant une ligne bT qui sera tangente en b à ce cercle, et qui rencontrera la tangente aT en un point T (fig. 2) situé sur la ligne $AA'A''$.

Or, le cercle $bb'b''$ et sa tangente bT sont connus. On peut construire aisément la tangente bT, puis déterminer le point T, et par suite le point de contact a, et le problême sera résolu.

Il faut remarquer que l'autre tangente Ta (fig. 2), donne une seconde solution. Ce qui provient de ce que la ligne $AA'A''$ convient à deux séries différentes de sphères tangentes.

Voyez d'autres solutions synthétiques de ce problême,

1°. Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, tome Ier., pages 18-28; *même tome*, pages 194-195, solution de M. Cauchy; tome II, pages 420-425, article de M. Dupin;

2°. Journal de l'Ecole Polytechnique, 7me. et 8me. cahiers, page 2-9, Mémoire de Fermat sur le contact des sphères, traduit du latin par M. Hachette; *même journal*, 16me. cahier, page 124, Mémoire de M. Gaultier de Tours.

On trouvera les solutions analytiques de ce problême, 1°. Bulletin de la Société philomatique, septembre 1812, par M. Poisson; 2°. tome II de la Correspondance, pages 63 et 409, par M. Français; 3°. journal de l'Ecole Polytechnique, 17me. cahier, deux solutions, l'une de M. Binet, l'autre de M. Hachette.

Construire par la ligne droite et le cercle, les points d'intersection d'un hyperboloïde de révolution et d'une droite donnée; par M. Lamé, *élève.*

La droite donnée en tournant autour de l'axe de l'hyperboloïde engendre un autre hyperboloïde, qui coupe le premier suivant deux cercles; la question proposée sera résolue, si l'on détermine les centres et les rayons de ces cercles. Soient (fig. 3, pl. 2) OA, OO' les rayons des cercles de gorge de deux hyperboloïdes de révolution, qui ont pour axe commun la perpendiculaire O au plan de ces cercles, et nommons *premier hyperboloïde*, celui dont le cercle de gorge est du plus petit rayon. Menons parallèlement à l'axe de révolution, et par une tangente ab au cercle de gorge de ce premier hyperboloïde, un plan qui coupe le second hyperboloïde suivant une hyperbole H. Le même hyperboloïde étant coupé par un plan méridien parallèle, suivant une autre hyperbole H', les deux hyperboles H et H' sont semblables, et leurs axes réels sont dans le rapport des rayons OA, OO' des deux cercles de gorge. Le plan de l'hyperbole H contient une génératrice G du premier hyperboloïde ; soit C le point où cette génératrice coupe l'axe réel ab de l'hyperbole; le point homologue C' de l'hyperbole semblable H', divise l'axe réel AB en deux parties AC', $C'B$ qui sont entre elles dans le rapport de aC à Cb; donc si par le point C' on mène une parallèle G' à la génératrice G, les points d'intersection de cette parallèle et de l'hyperbole H', seront les homologues des points d'intersection de la génératrice G et de l'hyperbole H. On sait construire avec la ligne droite et le cercle les points d'intersection de l'hyperbole méridienne H' et de la droite G'; donc on connaîtra les points d'intersection de l'hyperbole H et de la droite G. Les perpendiculaires abaissées de ces points sur l'axe de révolution, déterminent les cercles d'intersection des deux hyperboloïdes. La même considération s'applique à la recherche de l'intersection d'un ellipsoïde de révolution et d'une droite, en supposant que la section méridienne soit donnée.

On déduira facilement de ce qui précède la solution de cette question (en ne faisant usage que de la ligne droite et du cercle):

Mener par une droite donnée, un plan tangent à un hyperboloïde ou un ellipsoïde de révolution.

QUESTIONS DE MATHEMATIQUES ET DE PHYSIQUE, *proposées au concours général des lycées de Paris, année* 1814.

MM. Frédéric Latour, Privezac et Lamé, admis cette année (1814-1815) à l'Ecole Polytechnique, ont remporté les deux premiers prix de Mathématiques, et le premier accessit.

PROBLÈME DE MATHÉMATIQUES.

Etant donné un cône droit dans lequel le rayon de la base est le tiers de l'apothême, si l'on prend sur la surface du cône un point situé à la distance a du sommet, et que de ce point, comme centre, avec une ouverture de compas égale à r, on trace sur la surface du cône une courbe, laquelle pourrait être considérée comme l'intersection de cette surface avec celle de la sphère qui a son centre au point donné, et dont le rayon est r;

Si ensuite on développe la surface convexe du cône en une surface plane, laquelle sera un secteur circulaire, dont l'angle est $\frac{4}{3}$ d'angle droit, on demande l'équation de la courbe tracée sur la surface du cône, et devenue plane par le développement de cette même surface en un secteur plan : l'équation de la courbe étant trouvée en général pour toutes les valeurs de r et de a, on fera $a=3$, $r=2$, et on déterminera pour ce cas particulier la figure exacte de la courbe, en la traçant dans toute son étendue.

On examinera de plus si la courbe est décrite toute entière par le compas qui tourne autour du point donné, ou s'il n'y a qu'une partie de la courbe décrite par ce procédé, et quelle est cette partie.

Solution de M. Frédéric Latour. (Premier Prix.)

Concevons le cône et la sphère décrite du point donné A, fig. 4 pl. 2, et supposons un plan horisontal HB qui coupe ces deux surfaces, respectivement suivant un cercle que nous projeterons sur la base du cône. Joignons enfin leurs centres et un de leurs points d'intersection, nous formerons ainsi un triangle EFG.

Cela posé, il est clair que le plan méridien passant par le point F contiendra les points de la courbe situés à la hauteur HB, ou, ce qui est la même chose, à la distance SB du sommet; et que, par conséquent, l'un de ces points se trouverait sur la génératrice passant

par le point L, qui, dans le développement, fera avec la génératrice SK un angle qui aura pour mesure un arc égal en longueur à LK, décrit du rayon SK ; mais l'angle EGF a pour mesure le même arc décrit d'un rayon trois fois moindre ; il est donc triple du précédent; en sorte que l'équation polaire de la courbe que l'on cherche ne dépend que d'une relation entre $SB = v$, $EGF = 3u$; or, le triangle EGF donne:

$$\cos EGF = \frac{\overline{EG}^2 + \overline{GF}^2 - \overline{EF}^2}{2EG \times GF},$$

$$EGF = 3u, \quad EG = \frac{1}{3} SA = \frac{1}{3} a, \quad GF = \frac{1}{3} SB = \frac{1}{3} v,$$

$$\overline{EF}^2 = r^2 - \overline{BC}^2 = r^2 - \overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 = r^2 - (a - v)^2$$
$$+ \frac{1}{9}(a - v)^2 = r^2 - \frac{8}{9}(a - v)^2 ;$$

d'où

$$\cos 3u = \frac{a^2 + v^2 - 9r^2 + 8(a - v)^2}{2av},$$

ou
$$\cos 3u = 1 - \frac{9}{2}\left\{\frac{r^2 - (a - v)^2}{av}\right\} ;$$

telle est l'équation polaire de la courbe en comptant les angles, à partir de la génératrice qui passe par le point donné, et les rayons vecteurs, à partir du sommet du cône.

Si dans cette équation on fait $a = 3$, $r = 2$, on trouve :

$$\cos 3u = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{4 - (3 - v)^2}{v}\right) ;$$

d'où

$$v = \frac{8 + \cos 3u}{3} \pm \frac{1}{3}\sqrt{19 + \cos^2 3u + 16\cos 3u},$$

Sous la première forme, l'équation nous montre à cause des trois valeurs de u correspondantes à une valeur de $\cos 3u$, que si l'on partage la circonférence en trois secteurs de $\frac{4}{3}$ d'angle droit chacun, la courbe sera symétrique dans chacun de ces secteurs ; en sorte qu'il suffira de voir sa forme entre les lignes PB', PB (fig. 5); mais CB, sur laquelle on compte les angles, partageant BPB' en deux parties égales, la même forme d'équation fait voir que la portion de la courbe comprise entre ces deux droites, sera symétrique au-dessus

et au-dessous de PC; en sorte qu'il suffit de la discuter dans l'angle BPC; c'est-à-dire, depuis $\cos 3u = -1$, jusqu'à $\cos 3u = +1$; les valeurs de v correspondantes sont:

$$v = \frac{7 \pm 2}{3} \left\{ \begin{array}{l} = 3, \\ = \frac{5}{3} \end{array} \right. \qquad v = 3 \pm 2 \left\{ \begin{array}{l} = 1 \\ = 5 \end{array} \right. ;$$

or, en prenant le signe positif pour le radical, on voit facilement que $\cos 3u$ augmentant depuis -1 jusqu'à $+1$, v augmente depuis 3 jusqu'à 5; donc la courbe aura à-peu-près la forme EC, si $PE = 3$, $PC = 5$. Il y aura une autre branche (ce) séparée de la première, pour laquelle $Pe = \frac{5}{3}$, $Pc = 1$; car il est facile de prouver qu'il n'existe pas de courbe entre le point e et le point E; pour cela faisons $v = 3 - \delta$ dans la première équation, δ étant moindre que Ee, et par conséquent moindre que 2, nous aurons:

$$\cos 3u = 1 - \frac{3}{2}\left(\frac{4 - \delta^2}{3 - \delta}\right):$$

or, $\frac{3}{2}\left(\frac{4-\delta^2}{3-\delta}\right)$ est positif, si $\delta < 2$; et il faudra que l'on ait: $\frac{3}{2}\left(\frac{4-\delta^2}{3-\delta}\right) < 2$, ou au plus égal; delà on tire $\delta > \frac{4}{3}$ ou égal; d'où $v < 3 - \frac{4}{3} < \frac{5}{3}$, ou au plus égal, quand $\cos 3u = -1$, c'est-à-dire, sur le rayon PB.

Enfin la génération de la courbe fait voir que la plus grande valeur du rayon vecteur sera $PC = 3 + 2$, et la plus petite $Pc = 3 - 2$; donc si on achève la courbe dans les autres angles où elle est symétrique, et que l'on décrive quatre cercles avec les rayons 5, 3, $\frac{5}{3}$, 1 et du centre P, la courbe sera toute entière comprise dans le cercle PC qu'elle touchera aux points C, G, L; elle se composera de deux courbes distinctes, l'une comprise entre ce premier cercle et le cercle PE qu'elle touchera aux points E, N, I; l'autre comprise entre les cercles décrits du rayon Pc qu'elle touchera aux points c, g, l, et du rayon Pe qu'elle touchera aux points e, n, i: il n'y aura rien dans le cercle Pc, rien entre les cercles Pe, PE.

On voit que le cône développé ne fournira que le secteur BPB'; en sorte que le compas n'aura décrit que la courbe comprise dans cet espace, ou le tiers de la courbe entière.

Solution de M. Privezac. (Deuxième Prix.)

Par le sommet P, fig. 6, pl. 2, du cône et le point A donné sur la surface, je mène l'apothême PB; suivant cette droite prolongée indéfiniment, je conduis un plan XPM tangent au cône, et je suppose que le développement de ce cône se fasse sur le plan tangent (*), ou que le cône roule sur ce plan, son sommet restant fixe.

Soit M' un point de la courbe à double courbure tracée sur la surface conique, et soit M ce même point lorsqu'elle est devenue plane; pour déterminer la position du point M, ou plutôt la courbe sur laquelle il est situé, j'emploierai les coordonnées polaires, appelant v le rayon vecteur PM et α l'angle qu'il fait avec la droite PX en tournant autour du pôle P.

Cela posé, en observant que la distance du point M' au sommet P ne change pas dans le développement, le triangle APM' donne d'après un principe de trigonométrie rectiligne :

$$r^2 = a^2 + v^2 - 2av \cos APM'.$$

Cette équation donne une relation entre v et l'angle APM'; mais comme nous voulons l'obtenir entre v et α, il faut prendre la valeur de $\cos APM'$ en fonction de α et de quantités connues. Or, dans l'angle solide trièdc formé par les plans CPB, CBD, DPB, on a, en vertu d'une formule très-simple de trigonométrie sphérique, $\cos APM' = \cos^2 BPC + \sin^2 BPC \cos BCD$; car les angles BPC, DPC sont égaux, et l'angle BCD mesure celui des plans BPC, DPC. Mais dans le triangle BPC rectangle en C, on a :

$$\sin^2 BPC = \frac{\overline{CB}^2}{\overline{PB}^2} = \frac{1}{m^2},$$

$$\cos^2 BPC = \frac{\overline{CP}^2}{\overline{PB}^2} = \frac{\overline{PB}^2 - \overline{CB}^2}{\overline{PB}^2} = \frac{m^2 - 1}{m^2},$$

en supposant pour résoudre la question dans un cas plus général, que l'apothême du cône est égal à m fois le rayon de la base. De plus, si BD' est la portion de l'arc du secteur sur laquelle s'est appliqué l'arc BD par le développement, les angles BCD et $BPD' = \alpha$ seront en raison inverse des rayons CB et PB, ce qui donne l'angle $BCD = m\alpha$, donc:

$$\cos APM' = \frac{m^2 - 1 + \cos m\alpha}{m^2}.$$

(*) Ce plan peut être considéré comme celui de la feuille.

On en déduit que l'équation de la courbe est, en la résolvant par rapport à cos $m\alpha$:

$$\cos m\alpha = 1 - \frac{m^2(r^2 - (a-v)^2)}{2av}.$$

Cette forme est simple et peut servir à trouver aisément les limites de la courbe ; car on sait que celles de cos $m\,\alpha$ sont 1 et — 1.

Équation qu'il s'agit de discuter et construire. (Suit la discussion de cette équation) (*).

PROBLÊME DE PHYSIQUE.

Après avoir expliqué la construction de la pompe foulante, et la cause et les progrès de l'ascension de l'eau à chaque coup de piston, on examinera lequel des deux est le plus avantageux, de placer la soupape, ou en bas du tuyau d'aspiration, ou bien à la jonction de ce tuyau avec le corps de pompe.

On fera voir dans quel cas l'eau peut s'arrêter dans le tuyau d'aspiration ou dans le corps de pompe, quoique le piston, lorsqu'il est au plus bas point de sa course, ne soit pas à 32 pieds au-dessous du niveau de l'eau qu'il faut élever.

1er. Prix. . . . . Blanchet. { N'est point entré à l'Ecole.

2e. Prix. . . . . Médous.. { Admis à l'Ecole Polytechnique.

(*) *Note sur l'intersection d'un cône à base fermée par une surface fermée, et sur la dernière partie du problême de mathématiques, proposé au dernier concours général des lycées de Paris.*

La courbe d'intersection du cône et de la surface est nécessairement fermée, et quand on rapporte cette courbe sur le développement du cône, elle devient une courbe plane fermée ou infinie, et dans les deux hypothèses, elle est composée de parties égales, dont les extrémités se réunissent ou ne se réunissent pas.

Pour concevoir comment une ligne tracée sur un cône, a plus d'étendue sur le développement de ce cône que sur le cône même, on peut supposer le cône enveloppé par une toile sans épaisseur, qu'on a pliée un nombre indéfini de fois sur elle-même. Un plan ou toute autre surface coupe les diverses couches de l'enveloppe, suivant une même ligne, qui peut être composée de plusieurs branches ; or, toutes les couches superposées, sont séparées sur le développement du cône ; donc la courbe d'un cône, doit avoir sur le développement de ce cône, plus d'étendue que la courbe elle-même ; examinons les deux cas où elle sera fermée ou infinie.

Le développement du cône correspond a un secteur, dont les rayons extrêmes représentent la même arête du cône. L'arc qui mesure l'angle de ces rayons est, ou n'est pas une partie aliquote de la circonférence ; dans le premier cas, les courbes fermées du cône sont encor des courbes fermées sur le développement, et dans le second cas, elles sont infinies, ce qui est évident. H. C.

§. II. MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

Analyse du premier Mémoire (*) *sur la stabilité des corps flottans ; par M.* Ch. Dupin, capitaine en premier au corps du génie maritime, correspondant de l'Institut.

Mémoire présenté à la premier classe de l'Institut de France, le 10 janvier 1814.

Enhardi par l'indulgence avec laquelle la première classe de l'Institut a daigné recevoir et approuver nos premiers Mémoires, en les déclarant dignes d'entrer dans sa collection des Savans étrangers, nous osons aujourd'hui lui présenter le commencement des applications de notre théorie de la courbure des surfaces. Dans ce nouveau travail, nous avons dû laisser la méthode qui nous avait conduits jusqu'ici, pour suivre une marche nouvelle.

En exposant la première partie de nos recherches, nous n'étions occupés que de la seule théorie. Les applications, que parfois nous avons présentées, n'étaient que de simples aperçus, jetés en avant pour répandre plus de jour sur des vérités abstraites, et rendre ainsi leur succession moins aride, en offrant d'espace en espace des exemples faits pour parler à l'imagination. Sans négliger les observations et les vérités de détail, nous avons cherché sur-tout à poser des principes simples et généraux, pour qu'ils pussent être faciles et féconds en conséquences. Essayons maintenant d'appliquer ces résultats à des questions d'un très-fréquent usage ; par là nous rendrons de plus en plus sensible l'esprit de notre méthode.

Si jamais elle peut être de quelque intérêt, ce sera sur-tout lorsqu'on la verra s'étendre à des sujets, dont on a depuis longtems apprécié le besoin et l'importance.

Parmi les questions traitées jusqu'ici par les seules lois de la mécanique, l'une de plus intéressantes, est sans contredit celle dont le but est de déterminer l'équilibre, et la stabilité des corps solides flottant sur des fluides. De sa solution dépend nécessairement la sûreté, et à beaucoup d'égards le perfectionnement de la navigation. D'ailleurs une foule de recherches physiques, et mille usages des arts se rapportent à ce problême remarquable.

(*) Ce Mémoire, sur le rapport d'une commission composée de MM. Sané, Prony et Carnot, rapporteur, a été déclaré digne de l'approbation de la Classe, et de l'insertion dans sa Collection des savans étrangers.

Mais quoiqu'on n'ait encore envisagé cette question que comme étant du ressort de l'hydrostatique, il est facile de voir qu'elle peut être ramenée à des considérations purement géométriques ; et comme ces considérations peuvent toutes être fournies par la théorie de la courbure des surfaces, nous allons nous en occuper, pour offrir ainsi la première application étendue de cette même théorie.

En traitant un sujet illustré déja par les travaux des savans les plus célèbres, si tout n'est pas épuisé, si nous sommes assez heureux pour parvenir à quelque vérité nouvelle, nous n'attribuerons sa découverte qu'à la marche que nous avons suivie ; et, moins nous avons eû de mérite à nous laisser conduire où elle nous menait, plus sa bonté sera prouvée aux yeux des vrais géomètres : hâtons nous d'entrer en matière.

Le théorême qui sert de principe fondamental à tout ce Mémoire, se trouve énoncé, mais sans démonstration, dans mon Mémoire *sur la description des lignes et des surfaces du second degré*, écrit en 1805, pendant mon séjour en Belgique, puis inséré dans le journal de l'Ecole Polytechnique, XIVe. cahier.

Toute l'application relative à la stabilité, faisait d'abord partie de mon premier Mémoire sur la courbure des surfaces ; mais le sujet s'étendant à mesure que je voulais l'approfondir, je me suis vu forcé d'en faire l'objet d'un travail à part : c'est celui dont j'ai l'honneur d'entretenir la classe.

Je ne dirai qu'un mot des principes très-connus sur lesquels il repose.

Je présente d'abord les premières notions mathématiques de la pesanteur des corps, de la comparaison de leur poids et de leur volume ; ce qui me conduit à donner la définition de la densité qu'on peut appeler en géométrie le rapport du volume réel des corps à leur volume apparent.

J'emprunte à la mécanique le seul principe du levier ; j'en déduis les principales propriétés des momens et des centres de gravité.

Je considère ensuite l'état d'un solide flottant sur un fluide, et je démontre que le solide ne peut rester en équilibre sur le fluide à moins que les deux conditions suivantes ne soient remplies :

1°. Le poids du corps flottant doit être égal au poids de tout le fluide déplacé par ce corps.

2°. Le centre de gravité du corps flottant et celui qu'occuperait le fluide déplacé, si tout à coup ce fluide reprenait sa première position ; ces deux centres, dis-je, doivent être situés sur la même verticale.

Nous disons un mot de l'équilibre des solides qui flottent sur des

fluides compressibles, ou qui sont plongés dans ces fluides. C'est ainsi que les aérostats peuvent se trouver suspendus dans l'atmosphère.

Ces vérités préliminaires une fois établies, nous passons de la situation précise de l'équilibre aux situations les plus voisines, dans lesquelles on peut placer un corps flottant.

Alors le problême se présente sous trois aspects bien distincts : ou le corps flottant, lorsqu'on commence à le déranger de sa position d'équilibre, revient de lui-même à sa première assiète, où il s'en écarte de plus en plus : ou enfin, il est certaines directions suivant lesquelles en dérangeant son équilibre, il revient de lui-même à la première position ; tandis que, sous toutes les autres directions, il s'écarte de plus en plus de cette même position.

Dans le premier cas, on désigne l'état d'équilibre du corps flottant en disant qu'il est *stable*. Dans le second cas, on dit que cet équilibre est *instable*, ou non stable. Dans le troisième enfin, qu'il n'a qu'une stabilité relative (*).

Le but de nos recherches, en considérant des corps flottans, dont la forme ait toute la généralité imaginable, est de déterminer les conditions des trois genres d'équilibre qui peuvent leur convenir, et les propriétés les plus remarquables de ces trois genres. C'est à développer ainsi notre plan, et les prèmiers théorêmes sur lesquels nous nous fondons, qu'est consacrée la première partie du premier Mémoire.

Lorsqu'un corps est plongé dans un fluide, on appelle *carène* le volume apparent de la partie immergée, terminée en dessus par le niveau du fluide, ou le plan horisontal de flottaison, et en dessous par la surface extérieure du corps flottant. (Lorsque nous parlons de la *surface d'un corps flottant*, c'est toujours de sa *surface extérieure* que nous entendons parler.)

Pour plus de briéveté, nous appellons simplement *centre de carène*, le centre de gravité de la carène, lequel est évidemment le même que le centre de gravité du fluide déplacé, lorsque ce fluide, comme l'eau par exemple, est dans toutes ses parties d'une égale densité ; or, tel est le cas que nous considérons.

Le poids total du corps flottant et la forme de sa surface extérieure restant les mêmes, si nous supposons qu'on déplace seule-

(*) Pour se rapprocher davantage des idées que rappellent dans le langage ordinaire, les expressions de *stabilité* et d'*instabilité*, il faudrait appeler non stable, l'équilibre qui tend à se rompre en tout sens, et réserver la qualification d'instable à cet équilibre qui, sous des directions différentes, est stable ou ne l'est pas.

ment quelques parties intérieurs, alors ou le centre de gravité de ce corps aura toujours sa première position, ou il se trouvera lui-même déplacé.

Dans la première hypothèse, il est évident que le déplacement des parties intérieures du corps flottant n'apportant aucun changement à la figure de la carène, aucun des élémens dont dépend sa position d'équilibre n'ayant varié, cette position doit encore se conserver la même.

Dans la seconde hypothèse, il faut examiner séparément deux cas bien distincts. En considérant la position primitive où le corps flottant était en équilibre, et la verticale qui passait alors par le centre de gravité, ce centre peut s'être déplacé sans quitter cette verticale, ou s'être déplacé en la quittant.

Dans le premier cas de cette seconde hypothèse, on voit encore que rien n'est changé dans les conditions de l'équilibre, et le centre de la carène primitive se trouvant toujours sur la même verticale que le nouveau centre de gravité, est encore le centre qui convient au nouvel état d'équilibre; cet état est donc le même que le précédent.

Delà résulte une conséquence très-simple, mais qui néanmoins mérite d'être remarquée. C'est que si l'on permet au corps flottant de descendre ou de monter verticalement, de manière à ce que le plan de flottaison soit toujours parallèle à un même plan fixe dans le corps, le flotteur ne pourra trouver dans ces états divers, qu'une seule position d'équilibre, en quelque point qu'on suppose le centre de gravité du corps flottant.

Passons enfin au second cas de la seconde hypothèse. Dans la première position d'équilibre, le centre de gravité du corps flottant et le centre de la carène étaient sur la même verticale; on suppose que le premier centre sorte de cette verticale: donc il faut que le second en sorte aussi pour que l'équilibre puisse encore avoir lieu; donc une nouvelle carène, et par conséquent un nouveau plan de flottaison appartiennent à ce nouvel équilibre.

Concevons maintenant que le centre de gravité du corps flottant prenne successivement toutes les positions imaginables dans l'intérieur du corps flottant; le centre de carène, et le plan de flottaison vont prendre pareillement une infinité de positions différentes; de manière que tous les centres de carène vont former une première surface; tandis que tous les plans de flottaison vont envelopper une autre surface.

On verra que la considération de ces deux surfaces suffit pour nous conduire à tous les résultats qu'on peut desirer sur la stabilité des corps flottans.

Pour plus de brièveté, nous appellerons *carénide*, la première des deux surfaces dont nous parlons : ainsi la carénide est le lieu de tous les centres de carêne.

Chacune des carènes dont le centre est placé sur cette surface a pour propriété caractéristique, d'avoir un volume égal à celui de la quantité constante du fluide déplacé par le corps flottant, dont le poids est supposé constant.

On peut donc donner de la *carénide* et de la surface enveloppe des flottaisons, cette définition purement géométrique. En supposant qu'un plan coupant retranche du corps flottant un segment d'un volume invariable, et que ce plan prenne ensuite toutes les positions possibles; d'après un telle hypothèse,

1°. Tous les centres de volume de ces segmens formeront par leur ensemble la surface que nous avons appellée *carénide ;*

2°. Tous ces plans coupans seront à-la-fois tangens à la surface des flottaisons, qui sera par conséquent leur surface enveloppe.

Parlons d'abord des propriétés de la première surface. Nous supposerons généralement dans ce que nous allons dire, que le corps flottant n'a qu'une étendue limitée, ce qui est le cas de la nature. Mais le corps flottant peut d'ailleurs être terminé par une seule nappe régulière, ou par la réunion de plusieurs; il peut même présenter les formes les plus arbitraires, sans que les résultats que nous allons exposer perdent pour cela rien de leur généralité.

La carénide est une surface toute entière enveloppée par la surface extérieure du corps flottant (*) ; elle est donc toujours d'une étendue limitée.

Elle offre d'abord pour caractère d'avoir, en chaque point, ses deux courbures constamment dirigées dans le même sens.

Et si l'on place le corps flottant dans une de ses positions d'équilibre ; puis qu'on détermine sur la carénide le centre de la carène correspondant, le plan tangent en ce point *à la carénide* sera nécessairement parallèle au plan de flottaison : il sera donc horisontal.

Donc aussi la verticale qui, dans la position d'équilibre, joint le centre de gravité du corps flottant avec le centre de carène ; cette verticale, disons-nous, est nécessairement *normale* à la carénide.

(*) Ceci suppose que la surface extérieure du corps flottant n'ait pas de parties trop concaves : dans ce cas, la surface canéride serait limitée par la surface développable qui circonscrirait extérieurement ces cavités. De manière que chaque arête de la surface développable toucherait le corps flottant en deux points qui limiteraient la seule partie de la surface développable que l'on devrait considérer.

Par ce premier aperçu, l'on voit déja que si la carénide était connue, la recherche des positions d'équilibre qui conviennent à chaque nouvelle position du centre de gravité du corps flottant, se réduirait à la simple recherche des normales de la carénide qui passent par ce point; que par conséquent le nombre des positions d'équilibre est toujours égal au nombre de ces normales, etc. Mais n'anticipons point sur l'ordre que nous devons suivre.

Puisque les lignes droites qui joignent les centres correspondans de la carène et du corps flottant, sont les normales d'une seule et même surface (la carénide), toutes les propriétés générales qui conviennent aux normales des surfaces appartiennent également à ces lignes droites. On voit donc que leur ensemble présente deux systêmes bien distincts de surfaces développables, tels que les surfaces développables d'un systême sont coupées à angle droit par toutes les développables de l'autre systême; que de plus, chacune de ces développables coupe la surface des centres de carène suivant une de ses lignes de courbure, etc.

Ce sont ces surfaces développables, les lignes et les centres de courbure qui leur correspondent, qui vont nous faire connaître tout ce qui peut être relatif à la stabilité des corps flottans.

Supposons qu'un corps flottant, placé d'abord dans une de ses positions d'équilibre en soit tout à coup infiniment peu dérangé, sans que pour cela le centre de gravité de ce corps ait cessé de rester au même point dans ce corps. Nous supposons aussi que le poids du corps flottant n'a pas varié.

Ce dérangement quel qu'il soit, peut toujours être regardé comme composé, 1°. d'un mouvement vertical de translation du centre de gravité; 2°. d'un petit mouvement de rotation autour d'une droite horisontale menée par ce même centre.

Maintenant si nous faisons tourner la carénide, c'est-à-dire, la surface lieu de tous les centres de carène, autour de l'axe horisontal dont nous parlons, cette carénide aura pour enveloppe une certaine surface; et alors il faudra distinguer trois cas également remarquables.

Ou l'enveloppe de la carène l'enveloppera, la circonscrira réellement; ou elle en sera totalement enveloppée (à partir du centre de carène qui correspond à la position d'équilibre qu'on considère);

Ou enfin les deux surfaces se pénétreront, de manière qu'une partie de la première sera hors de la seconde, tandis que l'autre partie de celle-ci sera dans l'autre partie de la première surface.

Or, dans le premier cas, l'équilibre *n'est pas stable*; dans le second cas, il *est stable*; dans le troisième cas enfin, l'équilibre *est*

indifférent, c'es-à-dire, que par rapport à l'axe horisontal autour duquel s'est opéré le dérangement qu'on considère, l'équilibre une fois dérangé, tend à se troubler de plus en plus dans le premier cas; à se rétablir, dans le second; et enfin, dans le troisième cas à conserver sa nouvelle assiète.

Présentées ainsi, les conditions de l'équilibre des corps flottans ne s'offriraient pas sous une forme assez simple pour être généralement et facilement saisies : réduisons les choses à leur expression la plus élémentaire.

Si, à partir d'une position d'équilibre donnée, nous inclinons un peu le corps flottant, en le faisant tourner autour d'une horisontale quelconque, et qu'ensuite nous menions, par le centre de gravité, un plan perpendiculaire à cette droite, ce plan étant vertical passera par le centre de carène correspondant à la position d'équilibre, et en ce point il coupera la *carénide* suivant une certaine ligne; concevons que pour le même point on détermine le *centre de courbure* de cette ligne.

Maintenant, si le centre de gravité du corps flottant est au-dessous de ce *centre de courbure*, l'équilibre du corps flottant est nécessairement *stable*.

Si le centre de gravité est au-dessus du centre de courbure, l'équilibre est nécessairement *instable*.

Et enfin l'équilibre est *indifférent* quand ces deux centres coïncident.

Delà résulte ce théorême qui paraît digne de remarque.

En comparant une position d'équilibre d'un corps flottant, avec les positions très-voisines qu'il peut prendre, la distance de son centre de gravité au centre de la carène, est un minimum *ou un* maximum, *suivant que l'équilibre est stable ou non stable: dans l'équilibre indifférent cette distance est constante.*

Si maintenant nous comparons entre eux les divers degrés de stabilité d'un même corps flottant, suivant qu'à partir de sa position d'équilibre, on l'incline successivement autour de tous les axes horisontaux possibles, un nouvel ordre de propriétés va se présenter à nous :

En se plaçant au centre de la carène qui appartient à la position d'équilibre que l'on considère, et traçant ensuite les lignes de plus grande et de moindre courbure de la surface carénide, qui passent par ce point,

1°. Lorsque l'axe d'inclinaison sera parallèle à la direction *de moindre* courbure, ce sera la direction *de la moindre* stabilité du corps flottant;

2°. Lorsque l'axe d'inclinaison sera parallèle à la direction *de plus grande* courbure, ce sera la direction *de la plus grande* stabilité du corps flottant.

Or, en chaque point d'une surface quelconque, les deux directions de plus grande et de moindre courbure se croisent toujours à angle droit.

Donc aussi les deux directions de plus grande et de moindre stabilité d'un corps flottant quelconque se croisent toujours à angle droit.

Si nous voulons comparer ces stabilités principales aux stabilités intermédiaires, nous pouvons le faire de la manière la plus simple au moyen de la courbe *indicatrice* de la surface *carénide;* car cette *indicatrice* étant déterminée pour le centre de la carène qui correspond à la position d'équilibre qu'on considère, les divers degrés de stabilité sont proportionnels aux carrés des diamètres de cette courbe, augmentés ou diminués d'une quantité constante.

Mais les diamètres de la courbe indicatrice sont placés symétriquement à droite et à gauche des axes de cette courbe. Donc à droite et à gauche des directions de plus grande et de moindre stabilité du corps flottant, les degrés de stabilité qui correspondent aux inclinaisons symétriquement placées sont pareillement égales entre elles. Des mêmes principes résulte encore cet autre théorême.

En déterminant les divers systêmes de tangentes conjugées (*) de la surface carénide, au centre de carène qui correspond à la position d'équilibre, chaque tangente représentant la direction d'une inclinaison du corps flottant; concevons ensuite qu'on ajoute ensemble les quantités qui représentent les degrés de stabilité qui correspondent aux directions conjuguées, prises deux à deux; alors la somme de deux stabilités conjuguées sera nécessairement constante.

Et comme les directions de plus grande et de moindre stabilité du corps flottant, sont aussi deux directions conjuguées de la surface carénide; il suit delà que la somme de deux stabilités conjuguées quelconques, est précisément égale à la somme de la plus grande et de la moindre stabilité du corps flottant.

Après avoir exposé les premières propriétés de la carénide, ou surface des centres de carène, il faut considérer la surface enveloppe des flottaisons. Cette surface est, ainsi que nous l'avons dit, définie par la propriété d'avoir pour plan tangent les plans de

(*) Voyez pour l'exposition de la théorie des tangentes conjuguées, le premier et le second Mémoires *des développemens de géométrie*, par M. Dupin.

flottaison qui terminent toutes les carènes d'égal volume que nous avons considérées.

Or, cette enveloppe des flottaisons est, comme la surface carénide, fermée de toutes parts; elle présente partout ses deux courbures dans le même sens: enfin elle embrasse complettement la surface carénide, ou est partout embrassée par elle, comme celle-ci l'est par la surface extérieure du corps flottant.

De manière que la carénide et l'enveloppe des flottaisons ne peuvent jamais se pénétrer.

On sait que chaque plan de flottaison est coupé par les plans de flottaison infiniment voisins, suivant une droite qui passe toujours par le centre de gravité de l'aire du premier plan: l'aire étant terminée par la surface extérieure du corps flottant. Ce beau théorême est dû à Lacroix, géomètre français du siècle passé.

En combinant ce principe avec la théorie des enveloppes, on voit que la surface enveloppe des flottaisons, comme la carénide, est le lieu de tous les centres de carène.

A l'aide de ces propriétés, nous démontrons les principes suivans.

I.

Le plus grand rayon de courbure de la surface des centres de carène, est pour chaque centre de carène que l'on considère, égal au plus grand moment d'inertie de l'aire de la flottaison correspondante, divisé par le volume de la carène.

II.

Le plus petit rayon de courbure est au contraire égal au plus petit de ces momens divisé par le volume de carène.

III.

La direction de la plus grand courbure de la carénide est celle de l'axe de plus grand moment d'inertie de l'aire de la flottaison.

IV.

La direction de la moindre courbure de la carénide est celle de l'axe du plus petit moment d'inertie de l'aire de la flottaison.

Les mêmes principes font connaître la grandeur des rayons de courbure de toutes les autres sections normales de la surface carénide.

Et comme la détermination des divers degrés de stabilité d'un corps flottant incliné tour à tour suivant toutes les directions, dépend immédiatement de la valeur de ces rayons de courbure, nous obtenons ainsi la mesure la plus simple de ces divers degrés de

stabilité. Il est facile de voir qu'elle concorde avec les beaux résultats présentés pour la première fois par Bouguer, dans son *Traité du navire*, et par Euler, dans sa *Scientia navalis*.

Comme les quantités desquelles dépend cette mesure de la stabilité, sont indépendantes de la situation horisontale des divers points de la carène et de l'aire de la flottaison, on conçoit qu'on peut altérer d'une infinité de manières différentes la forme d'un corps dont le poids est constant, sans que ce corps, en flottant toujours sur le même fluide, change pour cela de stabilité.

Dans ces diverses transformations éprouvées par la figure du corps flottant, nous cherchons à voir ce que deviennent la surface carénide et la surface enveloppe des flottaisons. Nous faisons voir qu'alors ces dernières surfaces éprouvent des transformations analogues à celles dont nous avons donné les conditions dans la 1re. partie de cet ouvrage, au sujet des surfaces qui doivent conserver entre elles au moins un contact du second ordre. Par conséquent ces surfaces conservent encore absolument la même courbure aux points qui correspondent à la position d'équilibre dont on s'occupe. Donc non-seulement alors la position d'équilibre du corps flottant est conservée, mais les degrés de stabilité qui correspondent à ces positions sont absolument restés les mêmes, ainsi que les directions de ces stabilités.

Pour terminer ce que, dans ce Mémoire, nous devons dire sur les propriétés générales de la surface enveloppe des flottaisons, il faut trouver pour chacun de ses points la direction des lignes de courbure et la grandeur des deux rayons de courbure.

Recherche des lignes et des rayons de courbure de la surface des flottaisons.

Si nous prenons un point sur l'enveloppe des flottaisons, et qu'après avoir déterminé le plan des flottaisons qui correspond à ce point, nous concevions tous les autres plans de flottaison voisins du premier *avec lequel ils forment un angle constant*, chacun de ces plans et le premier intercepteront dans le corps flottant deux onglets qui seront réunis par la droite intersection des deux plans.

Or, cette droite est tangente à la ligne de plus grande ou de moindre courbure de la surface des flottaisons, suivant que la différence de volume des deux onglets est un *minimum* ou un *maximum*.

Maintenant concevons que la surface extérieure du corps flottant devienne cylindrique, tout le long du contour de la flottaison que l'on considère. Alors les plans de flottaison infiniment voisins in-

tercepteront dans ce cylindre de nouveaux onglets. La différence de ces nouveaux onglets avec les premiers compris entre les mêmes plans, est un filet triangulaire ayant une de ses faces sur le cylindre, la seconde sur la surface extérieure du corps flottant, la troisième sur le plan de flottaison infiniment voisin du plan que l'on considère.

Et suivant que le volume total de filet triangulaire, est un *minimum* ou un *maximum*, la droite intersection des deux plans de flottaison qui le déterminent est tangente aux lignes de plus grande et de moindre courbure.

Présentons enfin une troisième expression de cette direction des lignes de courbure.

Si l'on applique à chaque point du contour de la flottaison un poids proportionnel à la tangente de l'angle formé par la verticale et la surface du corps flottant, on va former une ligne pesante.

Or, les axes principaux du plus grand et du plus petit moment d'inertie de cette ligne, seront respectivement tangens aux lignes de moindre et de plus grande courbure de la surface enveloppe des flottaisons.

Et, de plus, si l'on divise tour-à-tour par la superficie de la flottaison, ce plus grand et ce plus petit moment d'inertie, les quotiens seront respectivement les rayons de moindre et de plus grande courbure de la surface enveloppe des flottaisons.

Lorsque nous exposerons ce qui concerne la stabilité des vaisseaux, ce qui fera l'objet d'un Mémoire à part, on verra que ce n'est pas pour nous livrer à des recherches de pure curiosité que nous avons ainsi déterminé les élémens de la courbure de la surface enveloppe des flottaisons. Car la connaissance de ces élémens peut offrir une foule de données précieuses sur les qualités des navires, et sur plusieurs opérations des arts maritimes.

Tels sont les objets contenus dans le second paragraphe; dans le troisième et dernier, au lieu de supposer que le centre du corps flottant varie de position, pour parvenir à connaître les lois générales de la stabilité, nous supposons que le centre de gravité conserve toujours la même position dans le corps flottant, et nous tâchons de déterminer les diverses positions d'équilibre qui peuvent convenir à cette position unique du centre de gravité.

Déja nous savons que la recherche de ces positions d'équilibre est ramenée à la détermination des diverses normales qu'on peut, à partir du centre de gravité du corps flottant, abaisser sur la surface carénide.

Chacune de ces normales étant supposée verticale, le corps se trouvera successivement dans toutes ses positions d'équilibre.

Suivant que ces normales seront le *maximum* ou le *minimum* de la distance du centre de gravité aux divers centres de carène, elles correspondront à des positions d'équilibre *stables* ou non stables.

Et, comme d'un point quelconque, on peut toujours abaisser une normale au moins sur une surface donnée (cette normale indiquant la plus courte distance du point à la surface), concluons premièrement que, quelle que soit la forme du corps flottant, il peut toujours être placé dans une position d'équilibre, *et d'équilibre stable*. Ce principe qui devient extrêmement simple dans notre théorie, n'avait, ce nous semble, pas encore été démontré.

Limitons d'abord nos recherches, en plaçant dans le corps flottant un axe, dont la direction soit fixe, mais d'ailleurs quelconque, horisontale ou non; et n'envisageons que les diverses positions d'équilibre qui peuvent exister d'après cette hypothèse.

Au lieu de la surface entière des centres de carène, nous n'avons plus à considérer qu'une ligne, lieu des centres de carène qui peuvent convenir à l'axe fixe. Or, cette ligne étant une courbe fermée, nous faisons voir que le nombre de ses normales qui passent par le centre de gravité est pair, et que ces normales sont alternativement des *maxima* et des *minima*.

Donc le nombre des positions d'équilibre est pair, et l'équilibre est alternativement stable et non stable, lorsqu'on tourne régulièrement autour de l'axe fixe. De célèbres géomètres ont déja démontré ce principe en supposant cet axe horisontal. (Voyez la Mécanique de M. Poisson.)

Nous considérons en particulier un cas remarquable. C'est celui où quelques normales ne peuvent être regardées, ni comme des *maxima*, ni comme des *minima*. Ce cas arrive lorsque le centre de courbure de la ligne, lieu des centres de carène, se confond avec le centre de gravité du corps flottant. Nous faisons voir que, dans ce cas, pour que les théorèmes précédens puissent avoir lieu, il faut et l'on peut regarder chacune de ces positions particulières, comme la réunion de deux états d'équilibre, l'un stable et l'autre non stable.

Mais ce qui est le plus remarquable, c'est qu'en supprimant par la pensée ces positions d'équilibre mixte, les autres positions d'équilibre sont encore alternativement stables ou non stables, comme si les premières n'existaient absolument pas.

Passant enfin au cas général, nous prouvons que quand un corps fini quelconque flotte sur un fluide, sans être retenu par

aucun axe fixe, premièrement, il a au moins deux positions d'équilibre, l'une dont la stabilité est absolue, l'autre dont l'instabilité est pareillement absolue.

Secondement, que le nombre total des positions d'équilibre stable est toujours égal au nombre des positions d'équilibre non stable.

Telles sont les principales propriétés exposées dans ce premier Mémoire.

Le second présentera leur application aux surfaces du second degré en général; et, comme un corollaire, la démonstration des théorêmes exposés dans le beau livre d'Archimède, *De insidentibus in humido*, tous ces théorêmes seront ramenés à un seul et même principe.

Enfin, un troisième Mémoire sera consacré spécialement à la stabilité des vaisseaux, et présentera les divers principes qu'on peut en déduire relativement à la théorie des constructions navales. C'est alors que nous trouverons l'occasion de rendre hommage aux belles recherches d'Euler et de Bouguer, qui contiennent à-peu-près tout ce qu'on sait encore à ce sujet. C. D.

Extrait de l'ouvrage de M. DE PRONY, *publié en* 1804, *sur la théorie des eaux courantes*, 1 vol. in-4°. de 130 pages, 5 tableaux d'expériences, et 2 pl.; *par M.* HACHETTE.

PRINCIPAUX RÉSULTATS *de l'expérience, qui peuvent fournir les données nécessaires, pour asseoir les bases d'une théorie du mouvement des fluides incompressibles et pesans.*

Premier résultat. Un fluide comme l'eau, qui s'écoule par un tuyau ou par un canal, d'une longueur suffisante pour qu'il puisse y établir son régime, éprouve des résistances dues à des forces rétardatrices de même ordre que la force accélératrice de la pesanteur; d'où il suit que ces forces doivent non-seulement diminuer l'effet de la pesanteur d'une quantité finie, mais encor l'anéantir, et réduire le mouvement à l'uniformité.

Second résultat. Les résistances qui modifient l'effet de la pesanteur, sont, dans une section transversale quelconque d'un liquide en mouvement, indépendantes des pressions des molécules comprises dans cette section. (Expériences de Dubuat, Dobenheim et Benezech.)

Troisième résultat. Dans une section transversale quelconque, les diverses molécules ont perpendiculairement à cette section, ou parallèlement à la directrice, des vîtesses différentes. Il y a un point de cette section, ou se trouve le *maximum* de vîtesse. Dans un tuyau cylindrique, ce point est au centre de la section transversale circulaire. Dans un canal découvert, il est en général au-dessous de la surface, et si dans le plan de la section, on imagine une ligne droite menée de ce point à un point quelconque du perimètre de cette section, les vîtesses des points de cette ligne diminuent progressivement.

Quatrième résultat. La diversité des matières avec lesquelles on construit le canal ou le tuyau, ne fait pas varier sensiblement la résistance du liquide en mouvement, qui provient de l'action attractive des parois.

Cinquième résultat. Les molécules d'eau adhèrent les unes aux autres; ce qui constitue ce qu'en physique on appelle la *cohésion* ou la *viscosité*.

Historique.

Les premières déterminations dignes d'attention sur le mouvement de l'eau dans les canaux, en tenant compte des résistances, sont de M. Demery, qui travaillait avec Perronet en 1775, au projet du canal de l'Yvette.

En 1779, parut l'ouvrage de M. Dubuat (les Principes d'hydraulique); ce célèbre ingénieur en a publié une seconde édition en 1789, avec des augmentations considérables.

En 1800, M. Coulomb fit un Mémoire sur des expériences destinées à déterminer la cohérence des liquides, et les lois de leurs résistances dans les mouvemens très-lents. L'auteur satisfait aux phénomènes, en égalant la résistance à une fonction entière et rationnelle de la vîtesse, composée de deux termes, l'un proportionnel à la vîtesse simple, et l'autre au carré de cette vîtesse. M. Girard a le premier appliqué la loi de M. Coulomb aux cas des vîtesses que l'eau prend en coulant dans des lits naturels et factices; mais il a donné le même coefficient à la première et à la seconde puissance de la vîtesse; et par cette raison, ses formules n'ont pas toute la généralité desirable.

M. de Prony, après avoir recueilli les meilleures observations faites sur l'écoulement des liquides, s'est proposé de trouver des formules d'interpolation, qui fussent d'accord avec l'expérience. Il a d'abord résolu par deux méthodes, l'une graphique et l'autre analytique, le problême suivant :

Problême. Plusieurs résultats d'observations sont susceptibles d'être liés entre eux par une loi; en faisant à ces résultats de petites

corrections, l'équation qui exprime cette loi, peut se mettre sous la forme :

$$Z = a + bX,$$

Z et X étant des fonctions d'une ou de plusieurs variables, dont on a un certain nombre de valeurs observées immédiatement, ou calculées d'après les observations; il s'agit d'assigner aux constantes inconnues α et β, des valeurs telles que les phénomènes soient représentés le mieux possible, par l'équation précédente.

La solution de ce problême s'applique à l'équation de cette forme :

$$(E) \qquad L = au + bu^2,$$

u étant la vîtesse moyenne de l'eau dans un tuyau, a et b des constantes à déterminer d'après les expériences, et L une fonction donnée par la théorie, composée des quantités qui représentent le diamètre du tuyau, la pente, les charges d'eau sur l'une et l'autre extrémité.

Les constantes a et b ont été déterminées, de manière que l'équation (E) fût satisfaite par 51 expériences sur des tuyaux, dont les diamètres variaient depuis 3 jusqu'à 50 centimètres, et les longueurs depuis 3 mètres jusqu'à 2300 mètres. Les vîtesses observées et calculées par cette équation, ne différaient entre elles que des fractions $\frac{1}{25}$ ou $\frac{1}{30}$, en plus ou en moins.

La vîtesse moyenne est toujours connue dans les expériences sur les tuyaux, par la comparaison du volume d'eau écoulé en un tems déterminé avec la section transversale; il n'en est pas de même des expériences sur les canaux découverts, où la vîtesse moyenne se déduit ordinairement de la vîtesse à la surface. M. Prony a représenté ces vîtesses par les lettres u et v, et il a supposé qu'elles étaient liées entre elles par l'équation :

$$u = \frac{v(v+a)}{v+b},$$

a et b étant des constantes qui doivent satisfaire aux observations. Il a regardé l'expression $a'u^2 + b'u^2$ comme une fonction donnée par la théorie entre la longueur du canal, la pente, la section transversale et le périmètre de cette section ; il s'est servi des expériences connues, pour déterminer avec précision les constantes a' et b'.

Les formules suivantes sont le résultat du travail de M. Prony.

FORMULES

pour le mouvement des eaux dans les canaux découverts rectilignes.

Quantités données.

λ longueur du canal ; ζ différence de niveau entre les deux sections extrêmes ;

$I = \frac{\zeta}{\lambda}$ pente du canal par mètre ; ω sa section transversale ; χ son périmètre ;

$R = \frac{\omega}{\chi}$ rapport de l'aire de la section transversale à son périmètre ;

U la vîtesse moyenne ; V la vîtesse à la surface ;

Q le volume d'eau qui passe par la section ω pendant chaque unité de tems.

Formules.

$$(A)\left\{\begin{array}{ll} a(1) & U = -0,175 + \sqrt{0,03 + 3688\,IR}, \\ a(2) & U = -0,07 + \sqrt{0,005 + 3233\,IR}, \\ a(3) & U = 0,82\,V, \\ a(4) & U = \frac{4}{5}\,V. \text{ (Celle-ci qui est la plus simple,} \\ & \text{est suffisante pour l'usage ordinaire.)} \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$Q = U\omega, \quad (2)$$

$$aU + bU^2 = \frac{I\omega}{\chi} = IR;\ a = 0,0000444499;\ b = 0,0003093 14. \quad (3)$$

Les équations (1), (2), (3) renferment les six quantités I, ω, χ, U, V et Q ; trois de ces quantités étant données, on déterminera les trois autres.

La formule a (2) satisfait à trente-une expériences très-soignées, dont vingt trois ont été faites par M. Dubuat.

La formule (3) satisfait à dix expériences de Dubuat et deux de Chezy.

FORMULES

pour le mouvement des eaux dans les tuyaux cylindriques.

Données.

λ longueur du tuyau ;
D son diamètre ;
Z différence de niveau entre la surface de l'eau dans le réservoir supérieur, et celle de l'eau dans le bassin inférieur, ou charge de l'eau sur l'orifice inférieur ;
U la vîtesse moyenne;
Q la dépense d'eau dans l'unité de tems.

Formules.

$$(B) \quad U = -0{,}0248829 + \sqrt{0{,}000619159 + 717{,}857 \frac{DZ}{\lambda}} \,;$$

lorsque la vîtesse de l'eau ne sera pas très-petite, on pourra substituer à cette formule (B), celle-ci (4) :

$$U = 26{,}79 \sqrt{\frac{DZ}{\lambda}}, \qquad (4)$$

formule unique comprenant le système de formules (A) pag. 227, et la formule (B),

$$(C) \quad U = -0{,}0469734 + \sqrt{0{,}0022065 + (3041{,}47)\, G},$$

formule dans laquelle G représente la quantité RI pour les canaux découverts (page 227), et $\frac{DZ}{4\lambda}$ pour les tuyaux cylindriques.

$$Q = \frac{4Q}{\pi D^2} \quad (\pi = 3{,}1416), \qquad (5)$$

$$\left.\begin{array}{l} \frac{Z}{\lambda} D^5 - \alpha' Q D^2 - \beta' Q^2 = 0, \\ \alpha' = 0{,}000088268, \quad \beta' = 0{,}0022583. \end{array}\right\} \qquad (6)$$

Au moyen des trois équations (4), (5) et (6) entre les cinq quantités λ, D, Z, U et Q, deux étant données, on déterminera les trois autres.

La formule (B) satisfait à 51 expériences, la plupart faites par MM. Bossut et Dubuat, sur des conduites qui avaient depuis 3 jusqu'à 50 centimètres de diamètre, et depuis 3 mètres jusqu'à 2300 mètres de longueur.

Observations relatives aux formules de M. de Prony.

La formule (4) pag. 228, fait voir que la vîtesse suit sensiblement la raison directe composée des racines carrées du diamètre et de la charge d'eau, et inverse de la racine de la longueur du tuyau.

On a supposé que les sections horisontales, tant du réservoir de prise d'eau que du bassin où cette eau va se rendre, sont tellement grandes par rapport à la section transversale du tuyau, que les tranches horisontales du fluide dans ce réservoir et ce bassin, peuvent être considérées comme immobiles, ou comme ayant une vîtesse insensible par rapport à celle de l'eau dans ce tuyau.

Les formules relatives aux longs tuyaux, ne s'appliquent pas au calcul de l'écoulement par un orifice pratiqué dans une mince paroi, ou par un petit agutage.

Nous ferons connaître à la fin de cet extrait, un travail de M. de Prony, sur l'écoulement des fluides contenus dans un vase, par des orifices horisontaux.

Problème relatif au mouvement de l'eau dans les tuyaux de conduite cylindriques.

Un réservoir supérieur de distribution est alimenté par un courant, de manière à pouvoir fournir, sans que sa profondeur diminue, une quantité totale d'eau par jour, qu'il s'agit de répartir à des fontaines, ou à des bassins inférieurs, par le moyen de tuyaux de conduite, dans des rapports donnés qu'on suppose être ceux des nombres n', n'', n''', etc.

Nommant Q la quantité totale d'eau, et Q', Q'', Q''', les quantités d'eau respectives qui arriveront aux fontaines ou aux bassins, et s'assujétissant à la condition précédente, on aura d'abord :

$$Q' = \frac{n'}{n' + n'' + n''' + \text{etc.}} Q, \quad Q'' = \frac{n''}{n' + n'' + n''' + \text{etc.}} Q,$$

D', D'', D''', etc. étant les diamètres respectifs de ces tuyaux, et J', J'', J''', etc. les valeurs de $\frac{Z}{\lambda}$ correspondantes à ces diamètres, on aura pour déterminer les diamètres, autant d'équations semblables à l'équation (6) page 228, qu'il y a de diamètres :

$$J'D'^5 - \alpha' Q'D'^2 - \beta' Q'^2 = 0,$$
$$J''D''^5 - \alpha' Q''D''^2 - \beta' Q''^2 = 0,$$
etc.

Probléme relatif à l'élévation des eaux dans des tuyaux de conduite, au moyen de pistons.

Les machines hydrauliques destinées a élever l'eau, opèrent le plus souvent cette élévation, sur-tout lorsque la hauteur est considérable, en refoulant le fluide dans des tuyaux de conduite. L'effort auquel ce moteur doit continuellement faire équilibre, se compose, 1°. du poids d'une colonne d'eau, dont la base est ordinairement celle d'un piston, et dont la hauteur est la différence de niveau entre le réservoir inférieur et le bassin supérieur; 2°. de plusieurs résistances provenant de l'inertie des masses qui ont un mouvement alternatif, et des frottemens des pistons, axes, tourillons, etc.; 3°. enfin de la résistance au mouvement de l'eau qui a lieu dans le tuyau.

On demande qu'elle sera la pression sur la base du piston, provenant tant du poids que du mouvement du fluide?

La valeur de cette pression est:

$$\frac{1}{4} g \pi D^2 \zeta + \frac{4 \lambda Q}{D}\left(\alpha + \frac{4\beta}{\pi} \cdot \frac{Q}{D^2}\right),$$

expression dans laquelle les constantes ont pour valeurs:

$$g = 9{,}8088, \quad \pi = 3{,}1416, \quad \alpha = 0{,}00017, \quad \beta = 0{,}003416;$$

D est le diamètre du tuyau; Q la dépense dans l'unité de tems; ζ est la hauteur à laquelle l'eau est élevée, et la densité de l'eau est prise pour unité.

Quatre tableaux terminent l'ouvrage de M. de Prony. Ils contiennent les résultats des meilleurs expériences faites sur le mouvement des liquides, et la comparaison, tant des résultats de l'observation que de ceux qu'on obtient par les formules de MM. Dubuat, Girard et Prony. On conclut de cette comparaison, que les formules de M. de Prony sont celles qui s'accordent le plus avec l'expérience, et que dans l'état actuel de la science, elles suppléent autant que possible, au défaut d'une théorie complette.

M. de Prony avait déja publié en 1802, un Mémoire sur le jaugeage des eaux courantes. Il indique dans ce Mémoire deux moyens pour mesurer les quantités d'eau qui s'écoulent par un orifice horisontal ou vertical. De ces deux moyens, l'un très-simple et très-économique se réduit à exécuter ce qui est prescrit par la règle suivante:

« Choisissez une partie du lit du ruisseau, dont on puisse prendre
« commodément plusieurs profils en travers, la distance ou lon-
« gueur comprise entre les deux sections extrêmes étant 100,200, etc.

« mètres, autant que les localités le permettront ; établissez au « point le plus bas de cette longueur un barrage avec un pertuis, « et au point le plus haut un batardeau avec une vanne disposée « de manière qu'on puisse la fermer instantanément. Cette vanne « étant maintenue à une ouverture fixe, demeurera levée jusqu'à « ce que l'eau soit au même niveau et dans le lit du ruisseau, et « dans le réservoir compris entre le batardeau et le barrage du « pertuis qu'on suppose fermé ; ce dont on s'assurera au moyen de « deux flotteurs (*), communiquant l'un avec le lit du ruisseau, « et l'autre avec le réservoir. Lorsque cette condition sera rem- « plie, on fermera instantanément la vanne, et l'on ouvrira le « pertuis. L'eau du réservoir s'écoulera, et l'on observera les abais- « semens successifs du niveau de l'eau dans ce réservoir, qui « correspondent à de très-petits intervalles de tems, par exemple, « des secondes. Connaissant d'ailleurs par les profils du lit du « ruisseau, les volumes des tranches horisontales du réservoir d'une « petite épaisseur, par exemple, d'un centimètre, on calculera « par les formules d'interpolation connues, l'écoulement qui cor- « respond au niveau constant de l'eau dans le ruisseau. »

Observations.

Le niveau de l'eau dans la plupart des ruisseaux, varie suivant les saisons et suivant les années ; ce n'est donc que par des expériences répétées à diverses époques, qu'on peut obtenir une mesure moyenne des eaux courantes d'une rivière ou d'un ruisseau.

La distance que M. de Prony conseille de mettre entre la vanne et le pertuis, doit être la plus grande possible, afin de diminuer l'influence des mouvemens intérieurs de l'eau du réservoir sur l'écoulement par le pertuis.

On épargnerait le travail qu'exige la mesure des profils en travers du lit de la rivière, en établissant, ainsi que M. de Prony l'a proposé, sur la portion du lit qui sert de réservoir, deux bordages parallèles, composés de planches posées horisontalement et de champ, et fixées par des clous sur des piquets. Cette disposition aurait pour objet de donner une base constante aux différens prismes d'eau écoulés, qui correspondent aux différens tems de l'écoulement. Les bordages auraient environ 4 à 5 décimètres de hauteur, a compter de leur arête supérieure qui serait au niveau des eaux de la rivière.

(*) Un tube recourbé communique par une extrémité avec l'eau dont il s'agit de mesurer le niveau ; il se prolonge sous terre horisontalement, et se releve verticalement au-dessus du sol. Cette branche verticale reçoit un flotteur qui porte une tige, dont l'extrémité répond aux divisions d'une échelle tracée sur une règle verticale.

Tandis que le réservoir se vide par le pertuis, il ne doit recevoir aucune partie des eaux de la rivière ou du ruisseau en amont du batardeau; il est donc nécessaire que le lit de la rivière puisse contenir les eaux retenues par le batardeau, et dans le cas contraire, il faudra pratiquer des rigoles, pour conduire les eaux de l'amont du batardeau à l'aval du pertuis.

Si dans les expériences sur les écoulemens, les tems correspondans aux changemens de niveau, sont très-rapprochés, on pourra considérer les différences constantes du tems, comme les différentielles constantes d'une abscisse de courbe, et les différences variables des hauteurs verticales du niveau de l'eau, comme les différentielles de l'ordonnée qui correspond à l'abscisse. Alors la question sera ramenée à trouver la tangente à la courbe, qui correspond à l'origine des coordonnées; l'abscisse de cette tangente sera le tems de l'écoulement du niveau constant du lit de la rivière, et l'ordonnée correspondante à cette abscisse représentera la quantité d'eau écoulée. M. de Prony a résolu cette question dans ses feuilles d'analyse (Journal de l'École Polytechnique, 3e. cahier), et a donné la formule d'interpolation qui s'applique au cas particulier des écoulemens dans des tems très-rapprochés. Si cette formule ne satisfait pas aux expériences, on pourra y substituer la méthode exposée dans son Mémoire sur le *Jaujeage des eaux courantes.*

Sur l'écoulement des liquides par des orifices horisontaux.

M. de Prony a fait imprimer en l'an 5 (1796), une solution du problême de l'écoulement des fluides incompressibles et pesans, par des orifices horisontaux, dans l'hypothèse du parallélisme des tranches. Après avoir observé que la solution de d'Alembert, donnée en 1744, dans son Traité des fluides, est incomplette, parce que la considération de la pression des tranches fluides y est omise, il a soumis cette question a un nouveau calcul entre les quantités désignées par le tableau ci-joint. (*Voyez la page suivante.*)

La notation posée, M. de Prony parvient aux deux équations suivantes :

$$p = Q + gz - \frac{n\alpha\, du}{dt} - \frac{1}{2}(m^2 - \mu^2)\, u^2,$$

$$p = P - g(h - z) + \frac{(N - n)\,\alpha\, du}{dt} + \frac{1}{2}\mu^2 u^2;$$

d'où l'on pourrait déduire une troisième équation qui ne contiendrait ni $\frac{du}{dt}$, ni $u^2 = 2g\xi$, et qui donnerait pour un point dé-

terminé de la masse fluide, la relation entre la pression p et la vîtesse $\sqrt{2g\xi}$, qui a lieu à l'orifice en même tems que cette pression.

Au moyen de ces équations (dit M. de Prony), on déterminera sans difficulté le *maximum* de vîtesse. Dans les circonstances les plus ordinaires, la vîtesse acquiert une valeur fort approchante de son *maximum*, au bout d'un tems très-court, et qui s'abrège d'autant plus que l'orifice est plus petit. (Voyez la Correspondance, tome I[er]., pag. 289; et la Mécanique de M. Poisson, tome II, page 444.)

ÉCOULEMENT DES LIQUIDES PAR DES ORIFICES HORISONTAUX. DÉSIGNATION DES QUANTITÉS.	Lettres qui représentent les quantités. Variables.	Constantes données.
Aire de la surface supérieure du fluide.	. . . . .	Ω
Aire d'une section horisontale quelconque de la masse fluide.	k	
Aire de l'orifice inférieur par ou le fluide s'écoule.	ω	
Pression rapportée à l'unité de surface sur l'aire Ω.	. . . . .	Q
Pression rapportée à l'unité de surface sur l'aire k.	p	
Pression rapportée à l'unité de surface sur l'aire ω.	. . . . .	P
Distance verticale entre les sections Ω et ω.	. . . . .	h
Distance verticale entre les sections Ω et k.	z	
Vîtesse de la tranche infiniment mince et horisontale correspondante à la section k.	v	
Vîtesse de la tranche infiniment mince et horisontale correspondante à l'orifice ω.	u	
Hauteur due à la vîtesse u du fluide à l'orifice	ξ	
Hauteur d'un prisme de fluide ayant l'orifice ω pour base, et un volume égal à celui du fluide écoulé par cet orifice, pendant le tems t.	ρ	
$1-\frac{\omega^2}{k^2}$	μ^2	
$1-\frac{\omega^2}{\Omega^2}$	m^2	
Intégrale de $\frac{\delta z}{k}$ prise dans l'étendue de z	n	
Intégrale de $\frac{\delta z}{k}$ prise dans l'étendue de h.	N	
Densité du fluide	1	
Le tems écoulé depuis le commencement du mouvement.	t	

Nota. La caractéristique δ indique les variations qui ne dépendent pas du tems, mais seulement de la distance de deux sections horisontales infiniment voisines; la caractéristique d indique les variations qui dépendent du mouvement d'un tranche élémentaire ou de son déplacement pendant l'instant dt.

Extrait d'un Mémoire, ayant pour titre : Théorie plus complète des machines qui sont mises en mouvement par la réaction de l'eau; par L. Euler, académie de Berlin, Mémoires de l'année 1754; par M. HACHETTE.

Description d'une machine hydraulique, fig. 7, pl. 2.

L'axe autour duquel la machine doit tourner uniformément, est vertical. Cette machine est composée d'un tambour creux de forme conique, et d'une enveloppe extérieure de même forme, qui tourne avec le tambour. Au-dessus de cet appareil, est un réservoir fixe, d'où l'eau s'écoule dans l'espace compris entre le tambour et son enveloppe extérieure. Cet espace est ouvert par le haut, et fermé dans la partie inférieure par un disque, autour duquel sont placés plusieurs petits tuyaux ouverts par les deux bouts. Ces tuyaux sont coudés suivant les tangentes a un même cercle. La base inférieure du tambour mobile est d'un plus grand diamètre que la base supérieure. Le réservoir fixe a aussi la forme d'un tambour. Au fond de ce réservoir se trouvent plusieurs canaux séparés par de minces diaphragmes, qui servent à diriger l'eau sous l'inclinaison requise. Si le réservoir fournit autant d'eau qu'il en sort par les embouchures des tuyaux, les tuyaux sont constamment pleins d'eau, et le mouvement de rotation de la machine devient bientôt uniforme.

Euler conclut de la théorie de cette machine que, pour obtenir le plus grand effet possible, la vitesse de l'eau par les embouchures des tuyaux doit être précisément égale à la vitesse même de ces embouchures; auquel cas l'eau en s'échappant tombe verticalement.

Rapport fait à la Classe des sciences Physique et Mathématiques de l'Institut, sur un ouvrage imprimé de M. Hachette, *ayant pour titre :* Supplément à la Géométrie descriptive *de M.* Monge. (*Séance du lundi 23 mars 1812.*)

(M. CARNOT, *Commissaire.*)

LA Classe m'a chargé de lui rendre compte d'un ouvrage imprimé de M. Hachette, ayant pour titre : *Supplément à la Géométrie descriptive.*

Le but de la Géométrie descriptive est de représenter sur des

surfaces planes, qui n'ont que deux dimensions, les objets qui en ont trois; et réciproquement de retrouver la forme de ces objets à trois dimensions, d'après les dessins qui les représentent sur ces surfaces planes.

Le moyen qu'on employe pour y parvenir, consiste à faire sur ces plans les projections des corps proposés.

La science des projections en général se divise en deux branches, dont l'une est l'exécution raisonnée, mais purement graphique de ces projections, et l'autre est leur théorie purement analytique.

Quoique ces deux branches de la même science ne soient, à proprement parler, que deux méthodes différentes de traiter les mêmes questions, leurs procédés respectifs ont entre eux si peu d'analogie apparente, que l'identité constante de leurs résultats forme des rapprochemens continuels, dont on ne peut s'empêcher d'être frappé. On admire la correspondance intime de deux sciences qui vont toujours d'un pas égal; dont l'une n'employant jamais le calcul, semble être entièrement du domaine de l'imagination, et dont l'autre ne tirant du fond de la question que les données strictement nécessaires pour l'expression algébrique des conditions proposées, laisse ensuite à l'analyse la plus abstraite, la plus dégagée de toute autre considération, le soin de dénouer successivement toutes les difficultés, et de ramener enfin aux résultats les plus élémentaires que puisse comporter la nature de la question.

Cet accord imperturbable de ce que l'analyse a de plus transcendant, avec ce que la synthèse offre de plus simple et cependant de plus subtil, donne la satisfaction de voir deux théories si disparates au premier aspect, se confirmer cependant l'une par l'autre, s'expliquer, se généraliser réciproquement; l'une en un mot, former des tableaux qui parlent aux yeux, tandis que l'autre s'occupe à les décrire aussi fidèlement qu'exactement dans la langue qui lui est propre.

Plusieurs auteurs ont traité séparement les deux branches de la science des projections sans s'apercevoir, ou du moins sans faire remarquer leur liaison. D'autres au contraire les ont traitées conjointement, sans chercher à les isoler l'une de l'autre: Clairaut, par exemple, donna, dès 1741, un Traité particulier des courbes à double courbure, qui se rapporte à la branche analytique; et longtems auparavant Philibert de Lorme, Mathurin Jousse, le Père Deran, Larue avaient donné l'art du trait appliqué à la coupe des pierres et à la charpente, lequel se rapporte à la partie purement graphique des projections. Enfin M. Frezier, ingénieur en chef à Landau, avait traité conjointement de l'une et de l'autre, sous le nom de stéréotomie, dans un ouvrage savant et rempli d'applications curieuses et utiles.

Mais les méthodes de pure théorie n'étaient d'aucun usage dans les arts ; les méthodes de simple pratique imaginées par des hommes industrieux, étaient reçues aveuglement et comme traditions par leurs successeurs, et les méthodes mixtes n'étaient accessibles qu'aux personnes plus qu'initiées dans la science du calcul. D'ailleurs toutes ces méthodes avaient l'inconvénient d'être trop restreintes, et applicables seulement à des cas particuliers.

M. Monge est, comme on le sait, celui qui a fait prendre une face nouvelle à la science des projections, considérée dans toute sa généralité. Il en a soigneusement séparé les branches, en même tems qu'il en a fait ressortir l'intimité et les rapports : les discussions analytiques l'ont conduit à de profondes spéculations sur les équations aux différences partielles. Quant à ce qui regarde les projections purement graphiques, le but et le résultat des travaux de M. Monge a été de ramener cette science à des principes généraux, et à des règles uniformes, à une pratique tout à-la-fois facile et rigoureuse ; d'en faire un corps de doctrine utile aux artistes qui ne connaîtraient que les élémens de la géométrie ordinaire, et d'en étendre enfin les applications à une foule d'objets qui paraissent n'avoir entre eux que des rapports très-éloignés.

Personne n'ignore non plus les services qu'a rendus à cette science usuelle M. Lacroix, l'un des premiers qui se soient occupés d'en développer les bases et de les mettre à la portée de tous les lecteurs, par la clarté et la précision de l'écrit (*Complément des élémens de Géométrie*, 1 vol. in-8°.) qu'il a publié sur cette matière.

Diverses circonstances ayant empêché que M. Monge ne complétât les travaux qu'il avait entrepris sur ce sujet et sur ses applications, M. Hachette s'est proposé de remplir les lacunes. Déja il a publié plusieurs ouvrages qui ont cette destination ; tels que l'*Essai sur la composition des machines*, qu'il a composé en commun avec MM. Lanz et Bétancourt, et le *Traité des machines*, qu'il présenta l'année dernière à la classe. Aujourd'hui il lui offre, sous le titre de *Supplément à la géométrie descriptive*, une série de questions particulières qu'il a classées pour être rapportées respectivement à chacun des cinq paragraphes qui composent la Géométrie descriptive de M. Monge, et c'est de ce supplément que la classe m'a chargé de lui rendre compte.

Le premier paragraphe de M. Hachette explique la génération des surfaces courbes, et ce qu'on doit entendre par les surfaces développables, leur arête de rembroussement, leur séparation en deux nappes par cette arête, leur axe de développement qui répond à l'axe des abscisses dans les courbes planes. Il y donne des notions générales sur les surfaces de révolution, les surfaces enveloppes, et particu-

lièrement les surfaces du second degré qu'il réduit à cinq ; savoir : *l'ellipsoïde*, *l'hyperboloïde à une nappe*, *l'hyperboloïde à deux nappes*, *le paraboloïde elliptique*, et le *paraboloïde hyperbolique*. M. Hachette démontre diverses propositions nouvelles relatives à ces surfaces.

Le second paragraphe contient quelques développemens relatifs au paragraphe correspondant de la géométrie descriptive de M. Monge.

Le troisième traite du contact des surfaces courbes. On y fait voir que le plan tangent à un point quelconque contient nécessairement les tangentes de toutes les sections planes, ou à double courbure, qui passent par ce point. On y résout d'une manière nouvelle ce problême utile par son application dans les arts graphiques : trouver la courbe de contact d'une surface de révolution, ou d'une surface engendrée par la ligne droite, avec une surface conique qui a son sommet en un point donné de l'espace. On y traite en particulier du contact des sphères, et on y résout par des considérations purement géométriques les problêmes relatifs à cet objet; problêmes que Fermat avait autrefois traités d'une manière très-élégante et très-simple, à la manière des anciens.

Le quatrième paragraphe traite des intersections des surfaces. M. Hachette applique particulièrement sa méthode de discussion aux surfaces du second degré et aux courbes à double courbure qui résultent de l'intersection des cônes et cylindres du second degré.

Le paragraphe cinq est relatif aux courbes à double courbure décrites par un point qui se meut suivant une loi donnée. M. Hachette a pris pour exemples de ces courbes l'hélice décrite sur un cylindre et l'épicycloïde sphérique. Il avait déja fait des applications très-intéressantes de ces considérations, dans son Traité des machines, pour expliquer la théorie de la vis d'Archimède, et des engrenages cylindriques et coniques.

M. Hachette termine son ouvrage par la solution graphique de tous les problêmes relatifs à la trigonométrie sphérique, et par l'explication de quelques épures relatives à des problêmes énoncés dans la géométrie de M. Monge. L'exactitude, ainsi que la netteté du dessin, y est remarquable, et c'est une chose précieuse dans cette géometrie.

Le travail de M. Hachette m'a paru digne de figurer à la suite de l'ouvrage dont il est le supplément ; et les savans, ainsi que les artistes, accueillleront sûrement avec plaisir la promesse que fait l'auteur de compléter le Cours entier de géométrie descriptive par un second supplément, qui contiendra la stéréotomie, la perspective et les ombres.

§. III. PHYSIQUE.

Mémoire sur la réfraction de la lumière; par M. Ampère.

Lu à l'Institut, le 27 mars 1815.

L'auteur de ce mémoire met sous une forme très-simple les valeurs de deux lignes qui déterminent la position d'un plan tangent à une surface donnée, et il emploie ces valeurs ainsi transformées, à démontrer ce théorème :

« Si dans le milieu où entre le rayon et par le point où il rencontre la surface réfringente, on conçoit une infinité de droites dont les unes représentent des rayons réfractés, et les autres les prolongemens des rayons incidens; qu'on prenne sur ces lignes, à partir de leur intersection mutuelle, des distances qui soient en raison inverse des vîtesses de la lumière suivant leurs directions, savoir, pour les premières, en raison inverse des vîtesses qui ont lieu après la réfraction, et pour les secondes, de celles qui ont lieu auparavant; si par les points ainsi déterminés on conçoit ensuite deux surfaces, dont l'une passe par tous ceux qui se trouvent sur les rayons réfractés, et l'autre par tous ceux qui sont situés sur les prolongemens des rayons incidens; qu'enfin on mène deux plans, dont l'un soit tangent à la première surface au point où elle rencontre un rayon réfracté, et l'autre le soit à la seconde, au point où elle rencontre le prolongement du rayon incident correspondant, la commune intersection de ces deux plans tangens sera dans le plan qui sépare les deux milieux. »

De ce théorème sur les lois du mouvement de la lumière passant successivement par différens milieux, dépend la solution de toutes les questions relatives à la réfraction ordinaire et extraordinaire. Pour donner une idée suffisante du travail de M. Ampère, nous commencerons par ce qui est relatif à la détermination du plan tangent à une surface courbe; nous rappellerons ensuite les lois du mouvement de la lumière dans le cas dont nous parlons, telles qu'elles ont été données par M. Laplace, dans les Mémoires de l'Institut de 1809, et nous terminerons cette note par la démonstration du théorême qui est le principal objet du mémoire.

Si l'on représente par x, y, z, les trois coordonnées d'un des points d'une surface courbe, par ξ, η, ζ, les coordonnées du plan

qui la touche à ce point, et qu'on suppose pour abréger $\frac{dz}{dx}=p$, $\frac{dz}{dy}=q$, on aura pour l'équation du plan tangent :

$$\zeta-z=p(\xi-x)+q(\upsilon-y).$$

En faisant $\zeta=0$ et $\upsilon=0$ dans cette équation, on aura pour la partie de l'axe de x comprise entre l'origine et le plan tangent :

$$\xi=\frac{px+qy-z}{p},$$

et en y faisant $\zeta=0$ et $\xi=0$, on trouvera que la partie de l'axe des y comprise entre l'origine et le même plan est :

$$\upsilon=\frac{px+qy-z}{q}.$$

Les deux points déterminés par ces valeurs suffisent avec le point de contact pour donner la position du plan tangent, et on peut rendre très-simples les expressions de ξ et de υ, en changeant les variables indépendantes de la manière suivante :

Si l'on nomme s et t les tangentes des angles que forment avec l'axe des z les projections sur les plans des $x\,z$ et des $y\,z$ de la droite menée de l'origine au point de contact, on aura $x=sz$, et $y=tz$; en substituant ces valeurs dans l'équation de la surface représentée en général par $F(x, y, z)=0$, elle deviendra $f(s, t, z)=0$, où l'on pourra considérer z comme une fonction des deux variables indépendantes s et t, on en tirera en la différenciant les valeurs de $\frac{dz}{ds}$, et de $\frac{dz}{dt}$ prises dans cette supposition ; et comme on aura d'ailleurs :

$$\frac{dz}{ds}=p\frac{dx}{ds}+q\frac{dy}{ds}=pz+ps\frac{dz}{ds}+qt\frac{dz}{ds},$$

ce qui donne :

$$\frac{dz}{ds}=\frac{pz}{1-ps-qt}=\frac{pz^2}{z-px-qy}=-\frac{z^2}{\xi},$$

et qu'on trouvera de même :

$$\frac{dz}{dt}=\frac{qz}{1-ps-qt}=\frac{qz^2}{z-px-qy}=-\frac{z^2}{\upsilon},$$

on en conclura pour ξ et η ces valeurs très-simples :

$$\xi = -\frac{z^2}{\frac{dz}{ds}} = -\frac{1}{\frac{1}{z^2}.\frac{dz}{ds}},$$

et

$$\eta = -\frac{z^2}{\frac{dz}{dt}} = -\frac{1}{\frac{1}{z^2}.\frac{dz}{dt}}.$$

M. Laplace a ramené tous les phénomènes de la réfraction ordinaire et extraordinaire à deux principes, dont le premier consiste en ce que la vîtesse de la lumière, dans un milieu, ne dépend en aucune manière de la forme de la surface qui termine ce milieu, ni de la nature de ceux qu'elle a pu traverser avant d'y entrer. En sorte que dans un milieu non cristallisé, cette vîtesse est une constante déterminée, et que, dans un milieu cristallisé, elle ne peut dépendre que de la direction du rayon relativement aux axes de cristallisation.

Le second principe est celui de la moindre action, en vertu duquel, si l'on suppose qu'un rayon de lumière traverse successivement deux milieux séparés par un plan, et qu'on prenne un point fixe sur sa direction dans l'un de ces milieux, et un point fixe sur sa direction dans l'autre, la somme des produits des distances de ces points fixes à celui où le rayon passe d'un milieu dans l'autre, par les vîtesses de la lumière suivant les lignes qui mesurent ces distances, est un minimum entre toutes les sommes de produits formés de la même manière relativement à d'autres points du plan qui sépare les deux milieux.

Au moyen de ces deux principes, il devient aisé de démontrer le théorême énoncé pag. 235.

On prendra pour origine des coordonnées le point où le rayon de lumière passe d'un milieu dans l'autre, pour axe des z la perpendiculaire élevée à ce point sur le plan qui les sépare, et pour axes des x et des y deux droites perpendiculaires entr'elles prises à volonté dans ce plan. Alors les rapports $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ que nous avons nommés s et t seront les tangentes des angles que forment avec la normale à la surface réfringente, pour la première surface les projections du rayon réfracté sur les plans des xz et des yz, et pour la seconde celles du rayon incident correspondant, en sorte qu'en distinguant par des primes les lettres qui se rapportent à la seconde surface, on aura pour déterminer les points où les plans tangens rencontrent

l'axe des x et celui des y, ces valeurs :

$$\xi = -\frac{1}{\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{ds}}, \qquad \eta = -\frac{1}{\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dt}};$$

$$\xi' = -\frac{1}{\frac{1}{z'^2}\cdot\frac{dz'}{ds'}}, \qquad \eta' = -\frac{1}{\frac{1}{z'^2}\cdot\frac{dz'}{dt'}}.$$

Comme deux angles suffisent pour déterminer la direction d'une droite dans l'espace, il est évident que, de quelque manière que les vîtesses de la lumière dans chaque milieu soit donnée en fonction des angles que la direction du rayon forme avec leurs axes dans le cas où ils sont cristallisés, on pourra toujours par les formules connues de la trigonométrie sphérique, exprimer ces vîtesses par une fonction $\varphi(s, t)$ de s et t dans le milieu où entre le rayon, et par une fonction $\psi(s', t')$ dans celui dont il sort.

On trouvera aisément

$$z = \frac{1}{\varphi(s, t).\sqrt{1+s^2+t^2}},$$

$$z' = \frac{1}{\psi(s', t').\sqrt{1+s'^2+t'^2}}.$$

En nommant a et a' les perpendiculaires abaissées sur la surface réfringentes des deux points fixes, pris l'un sur le rayon réfracté et l'autre sur le rayon incident correspondant, on aura en vertu du principe de la moindre action :

$$d\left(a\varphi(s, t).\sqrt{1+s^2+t^2} + a'\psi(s', t').\sqrt{1+s'^2+t'^2}\right) = 0;$$

c'est-à-dire :

$$d\left(\frac{a}{z} + \frac{a'}{z'}\right) = 0.$$

Dans cette équation z est fonction des deux variables indépendantes s et t, et z' l'est des deux quantités s' et t', qui dépendent de s et t en vertu de deux relations qu'on obtient facilement, en nommant b et c les projections sur l'axe des x et sur celui des y de la distance des deux points fixes, ces relations sont :

$$as + a's' = b, \quad \text{et} \quad at + a't' = c,$$

qui donnent :

$$\frac{ds'}{ds} = \frac{dt'}{dt} = -\frac{a}{a'}.$$

on en conclura pour ξ et η ces valeurs très-simples :

$$\xi = -\frac{z^2}{\frac{dz}{ds}} = -\frac{1}{\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{ds}},$$

et

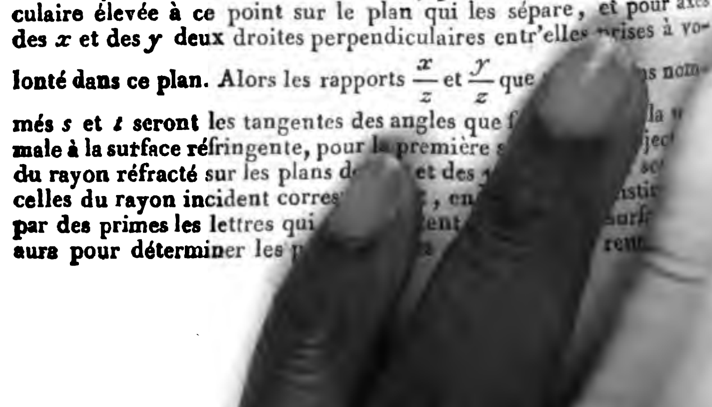
$$\eta = -\frac{z^2}{\frac{dz}{dt}} = -\frac{1}{\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dt}}.$$

M. Laplace a ramené tous les phénomènes de la réfraction ordinaire et extraordinaire à deux principes, dont le premier consiste en ce que la vîtesse de la lumière, dans un milieu, ne dépend en aucune manière de la forme de la surface qui termine ce milieu, ni de la nature de ceux qu'elle a pu traverser avant d'y entrer. En sorte que dans un milieu non cristallisé, cette vîtesse est une constante déterminée, et que, dans un milieu cristallisé, elle ne peut dépendre que de la direction du rayon relativement aux axes de cristallisation.

Le second principe est celui de la moindre action, en vertu duquel, si l'on suppose qu'un rayon de lumière traverse successivement deux milieux séparés par un plan, et qu'on prenne un point fixe sur sa direction dans l'un de ces milieux, et un point fixe sur sa direction dans l'autre, la somme des produits des distances de ces points fixes à celui où le rayon passe d'un milieu dans l'autre, par les vîtesses de la lumière suivant les lignes qui mesurent ces distances, est un minimum entre toutes les sommes de produits formés de la même manière relativement à d'autres points du plan qui sépare les deux milieux.

Au moyen de ces deux principes, il devient aisé de démontrer le théorême énoncé pag. 235.

On prendra pour origine des coordonnées le point où le rayon de lumière passe d'un milieu dans l'autre; pour axe des z la perpendiculaire élevée à ce point sur le plan qui les sépare, et pour axes des x et des y deux droites perpendiculaires entr'elles prises à volonté dans ce plan. Alors les rapports $\frac{x}{z}$ et $\frac{y}{z}$ que [illegible] nommés s et t seront les tangentes des angles que f[illegible] la [illegible] male à la surface réfringente, pour la première [illegible] projec[illegible] du rayon réfracté sur les plans d[illegible] et des [illegible] celles du rayon incident corres[illegible], en [illegible] par des primes les lettres qui [illegible] aura pour déterminer les [illegible]



l'axe des x et celui des y, ces valeurs :

$$\xi = -\frac{1}{\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{ds}}, \qquad \eta = -\frac{1}{\frac{1}{z^2}\cdot\frac{dz}{dt}};$$

$$\xi' = -\frac{1}{\frac{1}{z'^2}\cdot\frac{dz'}{ds'}}, \qquad \eta' = -\frac{1}{\frac{1}{z'^2}\cdot\frac{dz'}{dt'}}.$$

Comme deux angles suffisent pour déterminer la direction d'une droite dans l'espace, il est évident que, de quelque manière que les vîtesses de la lumière dans chaque milieu soit donnée en fonction des angles que la direction du rayon forme avec leurs axes dans le cas où ils sont cristallisés, on pourra toujours par les formules connues de la trigonométrie sphérique, exprimer ces vîtesses par une fonction $\varphi(s, t)$ de s et t dans le milieu où entre le rayon, et par une fonction $\psi(s', t')$ dans celui dont il sort.

On trouvera aisément

$$z = \frac{1}{\varphi(s, t).\sqrt{1+s^2+t^2}},$$

$$z' = \frac{1}{\psi(s', t').\sqrt{1+s'^2+t'^2}}.$$

En nommant a et a' les perpendiculaires abaissées *sur la surface* réfringentes des deux points fixes, *pris l'un sur le rayon réfracté* et l'autre sur le rayon incident *correspondant*, on aura en vertu du principe de la moindre action :

$$d\left(a\varphi(s, t).\sqrt{1+s^2+t^2} + a'\psi(s', t').\sqrt{1+s'^2+t'^2}\right) = 0;$$

c'est-à-dire :

$$d\left(\frac{a}{z} + \frac{a'}{z'}\right) = 0.$$

Dans cette équation z est fonction des deux variables indépen[dantes] s et t, et z' l'est des deux quantités s' et t', qui dé[pendent] de s et t en vertu de deux relations qu'on obtient facile[ment en] nommant b et c les projections sur l'axe des x et sur celui [des y de la] di[stanc]e des deux points fixes, ces relations sont :

$$\ldots t' = b, \quad \text{et} \quad at + a't' = c,$$

$$\ldots = \frac{dt'}{dt} = -\frac{a}{a'}.$$



Mais comme l'équation

$$d\left(\frac{a}{z}+\frac{a'}{z'}\right)=0$$

doit avoir lieu séparément à l'égard des deux variables indépendantes s, t, on a

$$\frac{a}{z^2}.\frac{dz}{ds}+\frac{a'}{z'^2}.\frac{dz'}{ds'}.\frac{ds'}{ds}=0,$$

et

$$\frac{1}{z^2}.\frac{dz}{dt}+\frac{1}{z'^2}.\frac{dz'}{dt'}.\frac{dt'}{dt}=0,$$

que les relations que nous venons de trouver changent en

$$\frac{1}{z^2}.\frac{dz}{ds}=\frac{1}{z'^2}.\frac{dz'}{ds'},$$

et

$$\frac{1}{z^2}.\frac{dz}{dt}=\frac{1}{z'^2}.\frac{dz'}{dt'}.$$

Ces valeurs étant les dénominateurs de celles de ξ, ξ', η, η', dont les numérateurs sont tous égaux à -1, on en conclura $\xi=\xi'$ et $\eta=\eta'$. La première de ces équations montre que les deux plans tangens coupent au même point l'axe des x, et la seconde qu'ils coupent aussi au même point l'axe des y, leur commune intersection rencontre donc ces deux axes, et se trouve par conséquent toute entière dans le plan des xy. *C. Q. F. D.*

Lorsque les milieux ne sont pas cristallisés, la vitesse y est la même dans toutes les directions, et les surfaces dont nous venons de parler deviennent par conséquent des sphères. En vertu du théorème qui vient d'être démontré, le rayon incident et le rayon réfracté se trouvent alors dans un plan perpendiculaire à la surface réfringente, et font avec la normale à cette surface des angles dont les sinus sont en raison inverse des vitesses, conformément à la règle de Descartes. Nous ne suivrons pas l'auteur de ce Mémoire dans les autres conséquences qu'il tire du même théorème, soit pour trouver par une construction, dont celle de Huyghens relative au rayon extraordinaire est un cas particulier, la direction du rayon réfracté, quand on connaît celle du rayon incident; soit pour déterminer l'inclinaison sous laquelle la réfraction se change en réflexion, et la direction que prend dans ce dernier cas un rayon réfléchi extraordinairement. Il est bien facile de suppléer aux détails dans lesquels nous pourrions entrer à cet égard.

Note sur la chaleur rayonnante; par M. Poisson.

(Lue à la Société Philomatique.)

M. Leslie a démontré, par des expériences très-ingénieuses, que les rayons calorifique partis d'un même point, pris sur la surface d'un corps échauffé, n'ont pas la même intensité dans tous les sens. L'intensité de chaque rayon, comme celle de toutes les émanations, décroît en raison inverse du carré des distances au point de départ; à distance égale, elle est la plus grande dans la direction normale à la surface; et, suivant M. Leslie, elle est proportionnelle pour tout autre rayon au cosinus de l'angle compris entre sa direction et cette normale. Cette loi conduit à une conséquence utile dans la théorie de la chaleur rayonnante, qui, je crois, n'a pas encore été remarquée. Il en résulte, en effet, que si l'on a un vase de forme quelconque, fermé de toutes parts, dont les parois intérieures soient partout à la même température et émettent par tous leurs points des quantités égales de chaleur, la somme des rayons calorifiques qui viendront se croiser en un même point du vase sera toujours la même, quelque part que ce point soit placé; de sorte qu'un thermomètre qu'on ferait mouvoir dans l'intérieur du vase, recevrait constamment la même quantité de chaleur, et marquerait partout la même température; ce que l'on peut regarder comme étant conforme à l'expérience. Cette égalité de température dans toute l'étendue du vase ne dépendant ni de sa forme, ni de ses dimensions, doit tenir à la loi même du rayonnement, et c'est ce que je me propose de prouver dans cette note.

Pour cela, appelons O un point fixe pris dans l'intérieur du vase; soit M un point quelconque de sa surface intérieure; tirons la droite OM, et, par le point M, menons intérieurement une normale à la surface. Désignons par α l'angle compris entre cette normale et la droite MO: si cet angle est aigu, le point O recevra un rayon de chaleur parti du point M; si, au contraire, il est obtus, le point O ne recevra aucun rayon du point M. Nous supposerons, pour simplifier, que le point O reçoit des rayons de tous les points du vase, c'est-à-dire, que l'angle α n'est obtus pour aucun d'eux: on verra sans difficulté comment il faudrait modifier la démonstration suivante, pour l'étendre au cas où une partie des parois du vase n'enverrait pas de rayons au point O. Soit a l'intensité du rayon normal, émis par le point M, à l'unité de distance; cette intensité, à la même distance et dans la direction MO, sera exprimée par $a \cos \alpha$, d'après la loi citée; et si nous représentons par r la longueur de la droite MO, nous aurons $\frac{a \cos \alpha}{r^2}$, pour l'in-

tensité de la chaleur reçue par le point O, suivant la direction MO. De plus, si nous prenons autour du point M une portion infiniment petite de la surface du vase, et si nous la désignons par ω, nous aurons de même $\frac{a\omega \cos \alpha}{r^2}$, pour la quantité de chaleur émise par cet élément ω et parvenue au point O. Or, on peut partager la surface du vase en une infinité d'élémens semblables; il ne reste donc plus qu'à faire, pour tous ces élémens, la somme des quantités telles que $\frac{a\omega \cos \alpha}{r^2}$, et l'on aura la quantité totale de chaleur reçue par le point O.

Cela posé, concevons un cône qui ait pour base l'élément ω, et son sommet au point O; décrivons de ce point comme centre et du rayon OM, une surface sphérique; et soit ω' la portion infiniment petite de cette surface interceptée par le cône. Les deux surfaces ω et ω' peuvent être regardées comme planes; la seconde est la projection de la première, et leur inclinaison mutuelle est égale à l'angle α, compris entre deux droites qui leur sont respectivement perpendiculaires: donc, en vertu d'un théorème connu, on aura $\omega' = \omega \cos \alpha$, et la quantité $\frac{a\omega \cos \alpha}{r^2}$ deviendra $\frac{a\omega'}{r^2}$. Décrivons une autre surface sphérique, du point O comme centre, et d'un rayon égal à l'unité; représentons par θ l'élément de cette surface intercepté par le cône qui répond aux élémens ω et ω'; en comparant ensemble θ et ω', qui sont deux portions semblables de surfaces sphériques, on aura $\omega' = r\theta$, et par conséquent

$$\frac{a\omega \cos \alpha}{r^2} = \frac{a\omega'}{r^2} = a\theta.$$

Maintenant, la quantité a est la même pour tous les points du vase, puisqu'on suppose qu'ils émettent tous des quantités égales de chaleur; il s'ensuit donc que la somme des produits tels que $a\theta$, étendue à toute la surface du vase, sera égale au facteur a multiplié par l'aire d'une sphère dont le rayon est pris pour unité. Donc, en appelant π le rapport de la circonférence au diamètre, et observant que 4π est l'aire de la sphère, nous aurons $4\pi a$ pour la quantité de chaleur qui arrive au point O; et l'on voit que cette quantité est indépendante de la position du point O, ce que nous voulions démontrer.

On peut aussi remarquer qu'elle ne dépend pas de la forme ni des dimensions du vase; d'où il résulte que si le vase est vide d'air, et qu'on vienne à en augmenter ou diminuer la capacité, la température marquée par un thermomètre intérieur demeurera toujours

la même; et c'est, en effet, ce que M. Gay-Lussac a vérifié par des expériences susceptibles de la plus grande précision. Ces expériences détruisent l'opinion d'un calorique propre au vide; elles montrent, en les rapprochant de ce qui précède, qu'il n'y a dans l'espace d'autre calorique que celui qui le traverse à l'état de chaleur rayonnante émise par les parois environnantes. Quand aux changemens de température qui se manifestent lorsqu'on augmente ou qu'on diminue tout-à-coup un espace rempli d'air, ils sont uniquement dus au changement de capacité calorifique que ce fluide éprouve par l'effet de la dilatation ou de la compression.

Si le point O, que nous avons considéré précédemment, était pris sur la surface intérieure du vase, la quantité de chaleur qu'il reçoit de tous les autres points de cette surface serait égale à la constante a multipliée par l'aire de la demi-sphère dont le rayon est un, et non pas par l'aire entière de cette sphère, comme dans le cas précédent. Ce produit $2\pi a$ est aussi égal à la somme des rayons calorifiques émis dans tous les sens par le point O; d'où il suit que chaque point des parois du vase émet à chaque instant une quantité de chaleur égale à celle qu'il reçoit de tous les autres points.

Généralement, si l'on veut connaître la quantité de chaleur envoyée à un point quelconque O par une portion déterminée des parois du vase, il faudra concevoir un cône qui ait son sommet en ce point, et pour circonférence de sa base le contour de la paroi donnée; puis décrire de ce même point comme centre, et d'un rayon égal à l'unité, une surface sphérique; la quantité demandée sera égale au facteur a multiplié par l'aire de la portion de surface sphérique interceptée par le cône. Ainsi toutes les fois que deux portions de surfaces rayonnantes, planes ou courbes, concaves ou convexes, seront comprises dans le même cône, à des distances différentes de son sommet, elles enverront à ce point des quantités égales de chaleur, si le facteur a est supposé le même pour tous les points des deux surfaces.

L'analogie qui existe entre la lumière et la chaleur rayonnante porte à croire que l'émission de la lumière doit se faire, comme plusieurs physiciens l'ont déja pensé, suivant la loi que M. Leslie a trouvée pour la chaleur rayonnante. Dans cette hypothèse, tout ce que nous venons de dire relativement à la chaleur s'appliquera également à la lumière, et la règle que nous venons d'énoncer sera aussi celle qu'on devra suivre en optique pour déterminer l'éclat d'un corps lumineux vu d'un point donné, ou, ce qui est la même chose, la quantité de lumière que ce corps envoie à l'œil de l'observateur.

Sur la nature des forces qui produisent la double réfraction ; par M. Biot.

(Institut de France, janvier 1815.)

Lorsqu'un rayon de lumière pénètre dans un cristal dont la forme primitive n'est n'y l'octaèdre régulier, ni le cube, on observe en général qu'il se divise en deux faisceaux inégalement réfractés, l'un que l'on nomme *le faisceau ordinaire*, suit la loi de réfraction découverte par Descartes, et qui est commune à tous les corps cristallisés ou non cristallisés ; l'autre suit une loi différente et plus compliquée ; on le nomme *faisceau extraordinaire*.

Huyghens a déterminé cette dernière loi par observation, dans le carbonate de chaux rhomboïdal, vulgairement appelé *spath d'Islande*, et il l'a exprimée par une construction aussi ingénieuse qu'exacte. En combinant ce fait avec les principes généraux de la mécanique, comme Newton avait combiné les lois de Kepler avec la théorie des forces centrales, M. Laplace en a déduit l'expression générale de la vitesse des particules lumineuses qui composent le rayon extraordinaire. Cette expression indique qu'elles sont séparées des autres par une force émanée de l'axe du cristal, et qui, dans le spath d'Islande, se trouve être répulsive.

On croyait qu'il en était ainsi dans tous les autres cristaux doués de la double réfraction. Mais de nouvelles expériences m'ont fait découvrir que, dans un grand nombre de cristaux, le rayon extraordinaire est attiré vers l'axe au lieu d'être repoussé. De sorte que, sous le rapport de cette propriété, les cristaux doivent être partagés en deux classes, l'une que je nomme à double réfraction *attractive*, l'autre à *double réfraction répulsive*. Le spath d'Islande fait partie de cette dernière; le cristal de roche est compris dans l'autre. Du reste il m'a paru que la force, soit attractive, soit répulsive, émane toujours de l'axe du cristal, et suit toujours les mêmes lois; de sorte que les formules de M. Laplace s'y appliquent toujours.

Ce résultat montre qu'il existe dans l'action des cristaux sur la lumière, la même opposition de forces que l'on a déja reconnue dans plusieurs autres actions naturelles, comme les deux magnétismes et les deux électricités. C'est à quoi conduisent également les observations que j'ai publiées sur les mouvemens d'oscillation et de rotation des particules lumineuses, et sur les polarisations *quartzeuse* et *berillée*.

Extrait du rapport fait à la classe des sciences physiques de l'Institut de France, sur les travaux de l'année 1814; par M. CUVIER, *secrétaire perpétuel.*

L'une des plus curieuses substances dévoilées dans ces derniers tems est l'*iode*, cette matière si longtems cachée dans le varech, qui s'élève, par la chaleur, en une vapeur d'un beau violet, et qui, se comportant avec les autres corps d'une manière analogue à celle du chlore, ou de ce qu'on appelait ci-devant gaz muriatique oxigéné, a donné une nouvelle force aux idées que l'hydrogène sulfuré avait fait naître, et sur la voie desquelles on avait été remis par le chlore; idées qui tendent à introduire dans la théorie chimique cette modification importante, que l'oxigène n'est pas à beaucoup près le seul principe capable d'opérer l'acidification.

En effet, M. Bertholet avait montré, il y a plus de trente ans, que l'hydrogène sulfuré, où il n'entre point d'oxigène, a toutes les propriétés des acides, et les chimistes allemands avaient fort insisté sur ce fait pour combattre une partie de la théorie française. MM. Thenard et Gay-Lussac firent, au commencement de 1809, des expériences d'où il résultait qu'il était impossible d'extraire l'oxigène de ce qu'on appelle communément *acide muriatique oxigéné*, et que, pour continuer à croire qu'il y existe, il faut supposer que dans tous les cas où cet acide se convertit en acide muriatique ordinaire, il se forme de l'eau qui s'unit indissolublement à l'acide produit, ou du moins que les élémens de l'eau y entrent comme parties intégrantes; tandis qu'en regardant le soi-disant acide muriatique oxigéné comme une substance simple dont la combinaison avec l'hydrogène donnerait l'acide muriatique ordinaire, on est dispensé de cette supposition. Mais, tout en énonçant ces deux manières de voir, nos deux chimistes s'en tinrent à la première, qui était plus analogue à ce qui se passe dans le grand nombre des acidifications.

M. Davy, qui avait été conduit aux mêmes conclusions, mit plus de hardiesse dans son choix; il adopta décidément la deuxième théorie, et donna en conséquence à l'acide muriatique oxigéné un nom particulier, celui de *chlore*, duquel il dériva ceux des deux autres acides dans lesquels il entre. L'un (*le muriatique*), où il est en combinaison avec l'hydrogène, fut appelé *Hydrochlorique*; l'autre (*le muriatique suroxigéné*), qui résulte de sa combinaison avec l'oxigène, reçut le nom d'*acide chlorique*.

Bientôt les expériences sur l'acide nommé jusqu'ici *fluorique*,

donnèrent lieu de penser, et ce fut M. Ampère, nouvellement nommé membre de la section de Géométrie, qui eut le premier cette idée, que sa composition est analogue à celle de l'hydrochlorique, c'est-à-dire, qu'il est composé d'*hydrogène* et d'un corps simple d'une nature particulière, que l'on dut alors désigner par le nom de *fluore*.

Ainsi la propriété d'acidifier l'hydrogène ou de devenir acide par son moyen, fut reconnue admissible dans trois substances : le soufre, le chlore et le fluore. L'iode en est venu offrir une quatrième.

Nous avons dit, dans notre analyse des travaux de l'année dernière, que l'iode avait été découvert par M. Courtois. Cet habile fabricant paraît l'avoir obtenu dès la fin de 1811, mais il ne l'avait communiqué qu'à M. Clément, son ami, qui lui-même ne le fit connaître au public que vers la fin de 1812. Cependant ce retard fut bientôt réparé; et, en peu de jours, M. Gay-Lussac et M. Davy eurent constaté les principales propriétés de cette substance, et spécialement l'analogie suivie qu'elle présente avec le chlore, et les deux acides qu'elle forme comme le chlore avec l'oxigène et avec l'hydrogène. M. Davy présenta cette analogie comme un nouvel appui pour la théorie qu'il avait adoptée.

Depuis lors on s'est occupé de l'iode avec l'intérêt dont il est digne. M. Colin, répétiteur de chimie à l'école polytechnique, a examiné ses combinaisons avec le mercure et l'ammoniaque, et reconnu qu'il se forme de l'acide iodique ou une combinaison d'iode et d'oxigène, toutes les fois qu'on traite l'iode avec des oxides où l'oxigène est faiblement condensé. Il a bien expliqué la génération de la poudre fulminante d'iode, découverte, ainsi que l'iode lui-même, par M. Courtois. Le gaz ammoniacal est absorbé par l'iode, et forme avec lui un liquide visqueux, lequel, mis dans l'eau, change de nature : l'hydrogène d'une partie de l'ammoniaque forme, avec une partie de l'iode, de l'acide hydriodique, qui se combine avec le reste de l'alcali, et l'azote de cette première portion d'ammoniaque forme avec l'autre partie de l'iode, la poudre fulminante.

Le même, M. Colin, a travaillé avec M. Gaulthier de Claubry à déterminer la manière dont l'iode se comporte avec les substances organiques. Ces deux jeunes chimistes ont constaté que les substances où l'oxigène et l'hydrogène sont dans les mêmes proportions que dans l'eau, se mêlent simplement à l'iode; que celles où il y a plus d'oxigène s'y combinent intimement; mais que ni les uns ni les autres ne l'altèrent tant qu'on n'emploie pas une chaleur capable de les décomposer; au contraire, celles où l'hydrogène abonde, convertissent l'iode en acide hydriodique, et il en arrive autant aux premières quand on les chauffe assez pour dégager leur hydrogène.

Ces expériences leur ont présenté plusieurs phénomènes curieux : un mélange d'iode et d'amidon trituré prend une couleur rouge, bleue ou noire, selon que l'iode y est plus abondant, etc.

Mais celui qui a travaillé sur l'iode avec le plus de soin et d'étendue, c'est notre confrère M. Gay-Lussac, dont l'ouvrage a été imprimé dans les Annales de chimie. Il y considère l'iode, lui-même, ainsi que ses combinaisons et celles de ses deux acides avec les divers corps, ou, ce que d'après les règles reçues de la nomenclature chimique, on devra nommer les *iodures*, les *iodates*, et les *hydriodates*. A l'occasion de l'iode, il revient sur le *chlore*, et donne plusieurs remarques nouvelles sur ses combinaisons, qui n'avaient pas toutes été appréciées avec justesse ; puis, considérant l'acide prussique comme essentiellement formé d'azote, d'hydrogène et de carbone, il conclut que l'azote doit aussi être ajouté à la liste des substances qui peuvent produire des acides sans oxigène, ce qui l'amène à regarder l'acidité et l'alcalinité comme des propriétés intrinsèques de certains corps et de certaines combinaisons, sans rapport nécessaire avec leur composition, tels que nous pouvons les découvrir, et ce qui le rapproche par conséquent des idées de Winterl et de quelques chimistes allemands. Ce Mémoire est rempli, d'ailleurs, de recherches délicates et d'indications ingénieuses, dont il ne nous est pas possible de rendre compte, mais qui ne manqueront pas de donner un nouvel essor à la partie de la chimie la plus profonde et la plus importante.

Sur un mode particulier de polarisation ; par M. Biot.

En étudiant l'action de la tourmaline sur la lumière, M. Biot y a reconnu la singulière propriété d'avoir la double réfraction ; quand elle est mince, et la réfraction simple, quand elle est épaisse. Pour mettre les phénomènes en évidence, il a fait passer les faces inclinées d'une grosse tourmaline, de manière a en former un prisme, dont le tranchant fut parallèle à l'axe de l'aiguille, qui est aussi celui du rhomboïde primitif. Si l'on regarde la flamme d'une bougie à travers ce prisme, en dirigeant le rayon visuel dans la partie la plus mince, on voit deux images d'un éclat sensiblement égal, dont l'une ordinaire, est polarisée dans le sens de l'axe de la tourmaline, et la seconde extraordinaire, l'est dans un sens perpendiculaire à cet axe. Mais à mesure que l'on ramène le rayon visuel dans la partie du prisme la plus épaisse, l'image ordinaire s'affaiblit, et enfin elle disparaît entièrement ; tandis que l'image extraordinaire continue à se transmettre, sans éprouver d'autre diminution de densité que celle qui provient de l'absorption. (Ce dernier article fait partie du rappórt de M. Delambre, sur les sciences mathématiques.)

Sujet du Prix de physique, proposé par l'Institut, consistant en une médaille d'or de 3000 fr.

« Déterminer, 1°. la marche du thermomètre à mercure, au « moins depuis zéro jusqu'à 200° centigrades; 2°. la loi du refroi- « dissement dans le vide; 3°. les lois du refroidissement dans l'air, « le gaz hydrogène et le gaz acide carbonique, à différens degrés « de température et pour différens états de raréfaction. »

Le résultat du concours sera publié le 1er. lundi de janvier 1817.

IV. ANNONCE D'OUVRAGES NOUVEAUX.

Journal de l'Ecole Polytechnique, publié par le conseil d'instruction de cette Ecole, tome X, ou 17me. cahier. 1 vol. in-4°. de 636 pages, 8 planches. Paris 1815.

Traité de chimie élémentaire, théorique et pratique; par M. *Thenard*, tome III. 1 vol. in-8°. de 638 pages.

Recherches expérimentales et mathématiques sur le mouvement des molécules de la lumière autour de leur centre de gravité, années 1812 et 1813; par M. *Biot*. 1 vol. in-4°.

Description des catacombes de Paris; par M. *Héricart de Thury*, ingénieur en chef au corps des Mines, inspecteur général des travaux souterrains du département de la Seine. 1 vol. in-8°., avec 8 planches.

Recherches expérimentales sur les propriétés physiques du sang; par M. *John Davy*, frère du célèbre chimiste de ce nom.

Les principaux résultats de ces recherches sont:

1°. Le sang artériel et le sang veineux ont à-peu-près la même capacité pour le calorique;

2°. La température des différentes parties du corps est d'autant plus basse qu'elles sont plus éloignées du cœur;

3°. Le sang de la femme est un peu plus léger que celui de l'homme;

4°. La densité des particules rouges du sang est à-peu-près 1130, celle de l'eau étant 1000.

Exercices de calcul intégral ; par M. *Legendre*. 1 vol. in-4°.

1re. Partie. Des fonctions elliptiques.
2e. Partie. Des intégrales Eulériennes.
3e. Partie. Des quadratures.
Supplément de la première partie.
4e. Partie divisée en deux sections, dont l'objet est de compléter la 2me. et la 3me. partie.

Essai philosophique sur les probabilités (*) ; par M. *Laplace*, 2e. édition, 1 vol. in-8°. Paris 1814.

---

§. V. PERSONNEL.

Promotions d'anciens élèves de l'Ecole Polytechnique.

ARTILLERIE.

Au 1er. février.

Nombre total d'officiers supérieurs d'artillerie, sortis de l'Ecole Polytechnique.

1 Maréchal de camp ; 7 Colonels ; 11 Majors ; 71 Chefs de bataillon.

Colonels.

MM. St.-Cyr.	MM. D'Haupoult.
Bernard.	Leclerc.
Gourgault.	Pailhou.
Boileau.	

(*) Se vend 3 fr., chez Mme. Ve. Courcier, quai des Augustins, n°. 57. On trouve chez le même libraire, les ouvrages suivans du même auteur :
1o. Théorie des probabilités. 1 vol. in-4°., 2e. édition. Paris 1814, prix 18 fr. ;
2o. Traité de Mécanique céleste. 4 vol. in-4°. Prix 66 fr. ;
3o. Système du monde, 4e. édition, avec le portrait de l'auteur. 1 vol. in-4°. Prix 15 fr., ou 2 vol. in-8°. Prix 12 fr.

Ce dernier ouvrage autant estimé par les hommes de lettres que par les savans, est le plus beau monument qu'on puisse élever à la gloire de l'esprit humain. Non-seulement il apprend, comme son titre l'annonce, l'état actuel de la science la plus étendue, l'astronomie ; il présente encore le tableau des connaissances physiques qui se lient au système général du monde, et dont l'explication dépend de la théorie des forces attractives. Heureux les jeunes gens, assez instruits dans la géométrie et l'analyse, pour démontrer les vérités que ce livre renferme : ceux là seuls ont le sentiment des vrais rapports de l'homme avec la nature.

Majors.

MM. Aubert.
Pache.
Lefrançais.
Abeille.
Duchamp.
Bitsch (Auguste).

MM. Durbach.
Évain (Auguste).
Etchegoyen.
Lasnon.
Brechtel.

GÉNIE MILITAIRE.

Au 1er. mars.

Suite des états donnés précédemment. (*Voyez* pag. 97 de ce vol.)

1 Maréchal de camp, M. Bernard; 1 colonel, M. Paulin; 4 majors, MM. Rohault de Fleury, Cournault, Foucauld (Jules), Durivau (14 avril 1815). 14 nouveaux chefs de bataillon.

INSTRUCTION PUBLIQUE.

M. Petit, instituteur adjoint de physique, à l'Ecole Polytechnique.

M. Lavit (auteur d'un traité de perspective, en 2 vol. in-4°., avec 110 pl.), professeur de mathématiques à l'Ecole d'architecture, en remplacement de M. Mauduit.

M. Chezy, professeur de sanscrit au collége de France.

M. Sedillot, adjoint du bureau des longitudes, pour l'histoire de l'astronomie chez les Orientaux.

CONCOURS DE 1814.

EXAMINATEURS POUR L'ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

Analyse; Mécanique........ MM. Legendre, Lacroix, *examinateurs permanens*;

Géométrie descriptive; Analyse appliquée à la géométrie. M. Binet (J.-P.-M.).

Physique et Chimie............ M. Dulong.

EXAMINATEURS POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Paris. . . . . M. Labey.
Tournée du Sud . . . . M. Francoeur.
Tournée du Nord. . . . . M. Dinet.

Les examens ont été ouverts le 1er. août, et les cours pour la deuxième division formée par la nouvelle promotion, ont commencé le 2 novembre.

Le Jury d'admission a prononcé, le 3 octobre 1814, sur les candidats qui se sont présentés au concours de cette année.

214 candidats ont été examinés,

SAVOIR:

A Paris.	77	214.
Dans les départemens.	137	

Sur ce nombre 155 ont été jugés admissibles,

SAVOIR:

De l'examen de Paris.	50	155.
Des départemens.	105	

Le nombre des candidats admis à l'Ecole, par suite de la décision du Jury, a été de 69,

SAVOIR:

De Paris.	23	69.
Des départemens.	46	

Nombre des élèves admis à l'Ecole depuis son établissement . . . . 3095.

SAVOIR:

De Paris.	1472	3095.
Des départemens.	1623	

Nombre des candidats examinés depuis l'établissement de l'Ecole. . . . . 7229.

SAVOIR:

De Paris.	3223	7229.
Des départemens	4006	

LISTE,

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE,

Des Élèves admis à l'École Polytechnique, par suite de la décision du Jury, du 3 octobre 1814.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Allenet.	Charles-Ferdinand.	St-Jean-d'Angely.	Char.-Inférieure.
Arnauldet.	Sidrach-Elicio.	Niort.	Deux-Sèvres.
Arvet.	Louis-Frédér.-Edouard.	Grenoble.	Isère.
Avril.	Sophie-Emilie-Philippe.	Caen.	Calvados.
Bach.	Etienne-Mathias-Gauderique.	Perpignan.	Pyrén. Orientales.
Bertrand.	Alexandre-Jacq.-Franç.	Rennes.	Ille-et-Vilaine.
Beudin.	Jacques-Félix.	Paris.	Seine.
Blondat.	Jean-Baptiste-Gabriel.	Troyes.	Aube.
Born.	Jean-Pierre.	Aynac.	Lot.
Bouché.	Alexandre.	Paris	Seine.
Carron.	Charles-Alphonse.	Saint-Vallery.	Somme.
Caut.	Maurice.	Paris.	Seine.
Chevalier.	Hervé-Arsène-Pierre.	Cherbourg.	Manche.
Cochard.	Casimir-Ovide-Prosper.	Sainte-Colombe-lez-Vienne.	Rhône.
Comte.	Isidore-Aug.-Marie-François-Xavier.	Montpellier.	Hérault.
Courant.	Adolphe.	Lisieux.	Calvados.
Démiau.	Casimir-Hyp.-Emman.	Thil.	Haute-Garonne.
Denis.	Paul-Camille.	Montier-en-Der.	Haute-Marne.
Desages.	Henri.	Hambourg.	....
Descolins.	Nicolas.	Vesoul.	Haute-Saône.
Desruelles.	Etienne-Alexandre.	Saint-Venant.	Pas-de-Calais.
Duflos (le Dicte).	Charles-Constant-Léopold-Marie.	Gournay.	Seine-Inférieure.
Duhamel.	Jean-Marie-Constant.	Saint-Malo.	Ille-et-Vilaine.
Fauché-Prunelle.	André-Alexandre.	Grenoble.	Isère.
Féraudy.	Jacques-Honoré.	Marseille.	Bouc.-du-Rhône.
Ferris.	Richard-Maurice.	Londres.	....
Fouache.	Ernest.	Pomera-Grenas.	Pas-de-Calais.
Galy-Cazalat.	Antoine.	Saint-Girons.	Ariège.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Gartempe (Voysin de).	Philippe-Gustave.	Gueret.	Creuse.
Gébard.	Auguste.	Erron.	Mayenne.
Genest.	Thomas-Clément.	Tours.	Indre-et-Loire.
Gengembre.	Camille.	Paris.	Seine.
Girod.	Frédéric.	Morez.	Jura.
Gondinet.	François-Candide.	Saint-Yrieix.	Haute-Vienne.
Goust.	Edme-Bonet.	Paris.	Seine.
Goyer.	Pierre.	La Chapelle Moche.	Mayenne.
Granier.	André-Marie.	Montpellier.	Hérault.
Guichard.	Jean-Baptiste.	Bercy.	Seine.
Lamé.	Gabriel.	Tours.	Indre-et-Loire.
Latouche (Nouel).	Alex.-François-Marie.	Saint-Brieuc de Mauron.	Morhihan.
Latour.	François-Frédéric.	L'Herm.	Ariège.
Lebozec.	Auguste-Charles.	Morlaix.	Finistère.
Le Moyne.	Nicolas-René-Desiré.	Metz.	Moselle.
Létourneau.	Bélair.	Angoulême.	Charente.
Levavasseur.	Adolphe-Pierre-Louis.	Rouen.	Seine-Inférieure.
Marey.	Guillaume-Stanislas.	Nuits.	Côte-d'Or.
Martin.	Claude-Eugène.	Marseille.	Bouc.-du-Rhône.
Maynial.	Emile.	Toulouse.	Haute-Garonne.
Médous.	Jean-Antoine-Marcelin.	Toulouse.	Haute-Garonne.
Mellet.	François-Noel.	Lodève.	Hérault.
Meyssonnier.	Dominique-Benoît-Alp.	Tain.	Drôme.
Monnet.	François.	Dijon.	Côte-d'Or.
Mordret.	Victor.	Evreux.	Eure.
Nivard.	Silex.	Sauzé-Vaussay.	Deux-Sèvres.
Petit.	Aimé-François.	Paris.	Seine.
Poittevin.	Pierre-Yves-Olimpe.	Metz.	Moselle.
Pouzols.	Jean-Auguste.	Montignac.	Dordogne.
Privezac (Le Brunet de).	Auguste.	Pagas.	Aveyron.
Regnard-Roux.	Charles-Franç.-Bernard.	Autun.	Saône-et-Loire.
Rocher.	André-Martial.	Paris.	Seine.
Savy.	Pierre.	Ségonzac.	Dordogne.
Servier.	Aristide-Camille.	Paris.	Seine.
Tiremois.	Jacques.	Bischwiller.	Bas Rhin.
Tourret.	Charles-Gilbert.	Montmarault.	Allier.
Toussaint.	Jean-Baptiste.	Mézières.	Ardennes.
Viader.	Louis.	Ille.	Pyrén Orientales.
Vial.	Claude-Marie.	Lyon.	Rhône.
Woisard.	Jean-Louis.	Metz.	Moselle.
Zhendre.	Mathias-Jean-Aristide.	Paris.	Seine.

ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

LISTES, par ordre de mérite, des élèves admis dans les services publics, pendant l'année 1814.

ARTILLERIE DE TERRE.

MM.
1 Le Corbeiller.
2 Fabre (Augustin).
3 Johanys.
4 De Beauvais.
5 Duviquet.
6 Céas.
7 Bernard-Chambinière.
8 Michaud.
9 Chapelié.
10 Dalbiat.
11 Surdey.
12 Bert.
13 Reverdit.
14 Villemain.
15 Bruneau.
16 Hoart.
17 Guy (Pierre-Gabriel).
18 Chausson.
19 Métais.
20 Séré.

MM.
21 Martin (Franç.-Marie-Emile).
22 Pradal.
23 Geneix.
24 Burnier.
25 Blanq Desiles.
26 Ladevèse.
27 Imbert St.-Brice (P.-A.-J.).
28 Cicille.
29 Boisson.
30 Viollette.
31 Gacon.
32 Delaroche.
33 Delamare.
34 Godebert.
35 Forfait.
36 David.
37 Noël (A.-F.-P.).
38 Dauche.
39 Guillery.

GÉNIE MILITAIRE.

MM.
1 Bauchetet.
2 Lallemand de Cullion.
3 Lebas.
4 Delmas.
5 Carnot.

MM.
6 Creuly.
7 Moly.
8 Duvivier.
9 Couillerot Descharrieres.
10 Coignet.

PONTS ET CHAUSSÉES.

MM.
1 Petit (Jean-Jacques).
2 Reibell.

M.
3 Watbled.

PLACES DIVERSES.

MM. Conscience..... Passé à l'Ecole normale.
Wetzell........ Professeur d'hydrographie à l'Ile de France.
Petit (Joseph).. Géomètre arpenteur à l'Ile de France.

SOUS-LIEUTENANT DANS LA LIGNE.

M. Miollis.

LÉGION D'HONNEUR.

Les Elèves de l'Ecole Polytechnique ont passé le 27 mars 1815, à la revue de l'Empereur. S. M. voulant leur témoigner sa satisfaction sur le dévouement qu'ils ont montré le 30 mars 1814, en défendant la capitale, a accordé la décoration de la légion d'honneur à deux Elèves, MM. Houeau et Bonneton.

S. M. a confirmé en outre la promotion faite précédemment pour le même objet, en faveur de MM. Petit (Jean-Jacques), Lallemand de Cullion, et Malpassuti.

ETAT de situation des élèves de l'Ecole Polytechnique, à l'epoque du 1er. janvier 1815.

L'Ecole était composée, au 1er. janvier 1814, de... 336 Elèves.
Elle a perdu pendant l'année 1814,

SAVOIR:

Admis dans les services publics.

Artillerie de terre............	39	56	154
Génie militaire.............	10		
Ponts et chaussées..........	3		
Nommés sous-lieutenans dans la ligne..	1		
Places diverses............	3		
Démissionnaires............	96	98	
Mort..............	2		

Il restait.............. 182
Elèves admis à l'Ecole, à dater du 1er. novembre 1814 . 69

TOTAL des élèves composant l'Ecole Polytechnique, au 1er. janvier 1815............ 251 Elèves.

SAVOIR:

Première division...........	131	251
Deuxième division...........	120	

---

§. VI. ACTE DU GOUVERNEMENT.

Décret du 1er. *mai* 1815. — Les élèves de l'Administration des Poudres et Salpêtres seront pris exclusivement parmi les élèves de l'Ecole Polythecnique, au concours, et ainsi qu'il est réglé pour les autres services publics, par la loi du 25 frimaire an 8.

ERRATA du volume III, 1er. *et* 2e. *cahiers.*

Premier cahier, page 1 — 110.

Page 37, ligne 2, après *edc*, fermez la parenthèse.
42, 21, apparente, *lisez :* apparentes.
53, 6, supprimez le mot *situés*.
55, 13, neuvième, *lisez :* n^{eme}.
Id. 15, telles, *lisez :* telle.
Id. 20, cercle A, *lisez :* cercle.
56, 14, rayon aB, *lisez :* rayon dB.
Id. 30, d'un arc Aa, la droite As, *lisez :* d'un arc Ba, la droite Hs.
61, 7, *supprimez :* demi.
Id. 14, $\sin \frac{1}{2} c$, *lisez :* $\cos \frac{1}{2} c$.
62, 12, $-\frac{1}{2} \tang^2 \frac{1}{2} b \sin^2 C$, *lisez :* $-\frac{1}{2} \tang^2 \frac{1}{2} a \tang^2 \frac{1}{2} b \sin^2 C$.
63, 18, $4 \sin \frac{1}{2}$, *lisez :* $4 \sin \frac{1}{2} s$.

Deuxième cahier, page 111 — 258.

145, 4, *osculateurs*, lisez : *de courbure*.
167, 21, $\sqrt{4s^2+(r+t)^2}$, *lisez :* $\sqrt{4s^2+(r-t)^2}$.
189, 9, au lieu de $-A'_2A_2Am^2)z^4+$, *lisez :* $-A'_2A_2m^2-A_4)z^4-$.
201, 29, 32 et 35, au lieu de A', *lisez :* A.
202, troisième alinea, au lieu de cadre $KLMN$, *lisez :* cadre $PQRS$.

SUITE DE LA TABLE DES MATIÈRES

Du volume III.

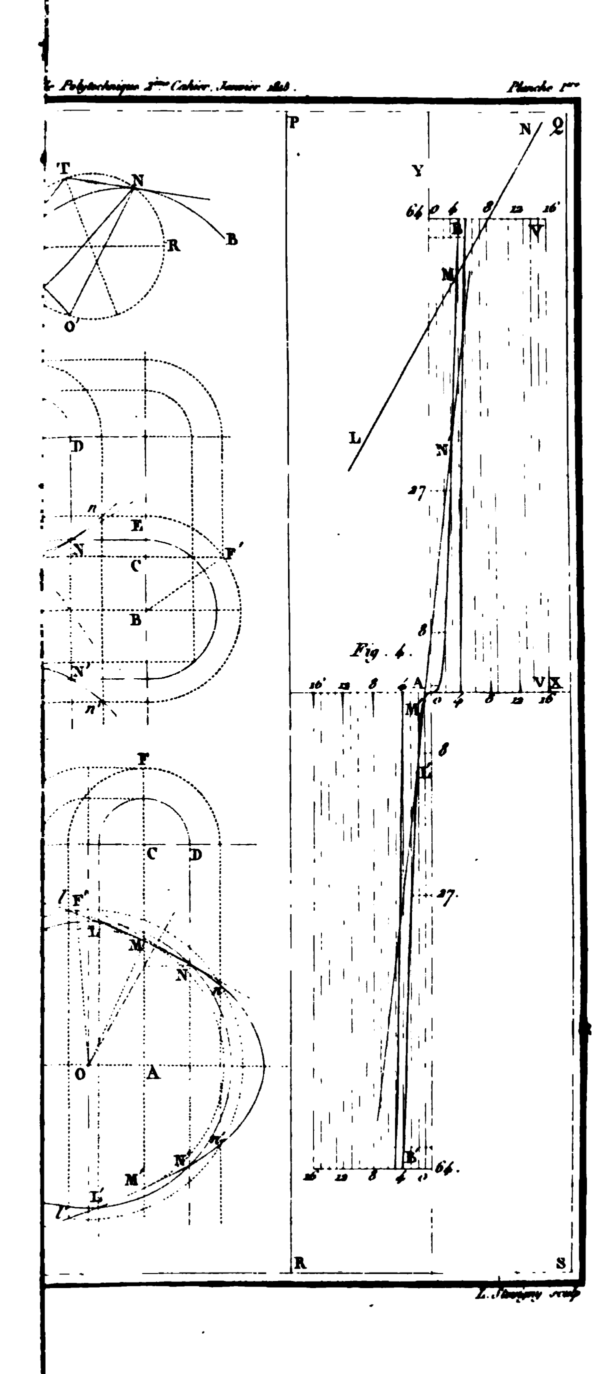
Table du 2e. cahier.

§. Ier. Analyse. — Géométrie.

§. II. Mathématiques appliquées.

§. III. Physique.

Fin de la Table.


T
N
R
B
O'
D
n
E
N
F'
C
B
N'
n'
F
C
D
l
F'
L
M
N
n
O
A
N'
M'
L'
l'
P
Q
N
Y
64
0
4
8
12
16
B
V
M
L
N
27
8
Fig. 4.
16
12
8
4
A
0
4
8
12
16
V
X
M
8
L
27.
B
64.
16
12
8
4
0
R
S

B'
C'
A'
E
Fig. 1ère
C
a
A
a''
b'''
b'
n
b
F
Fig. 2
B
A'
T
A
S
Fig. 4
B'
H
A
C
B
G
K
E
F
L
B
P
Fig. 6
C
A
M'
N
D'
B'
C
B
B'
D
Fig. 7

CORRESPONDANCE

SUR

L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Publiée par M. HACHETTE.

IIIe. Volume.

N°. III. *Janvier* 1816.

§. I.

HISTOIRE DE L'ALGÈBRE.

SUR L'ALGÈBRE DES INDIENS.

Traduit de l'Anglais (*), *par* M. TERQUEM, *professeur aux Écoles Royales d'Artillerie.*

Nous avons obtenu récemment des détails sur l'état de l'Algèbre parmi les habitans des Grandes-Indes; et il est probable que les recherches des savans Anglais nous procureront bientôt des renseignemens encore plus circonstanciés.

On avait depuis long-tems quelques raisons de soupçonner que les principes de l'Algèbre, ainsi que ceux de l'Arithmétique et de la Numération, nous étaient venus par les Maures et les Arabes, qui les avaient puisés eux-mêmes chez les Indiens. En effet il y a déjà plus d'un siècle qu'on sait en Europe, que les Indiens possèdent des ouvrages très-savans sur l'Astronomie. Des renseignemens dus à des savans Français, ont été publiés dans les

---

(*) Cette partie de l'Histoire de l'Algèbre est extraite d'un ouvrage de M. Hutton, intitulé Trats on Mathematical, etc., 3 vol. in-8., Londres, 1812. Les caractères ou mots indiens et arabes qui entrent dans cette traduction, seront gravés avec un renvoi aux pages, sur la première planche jointe à ce cahier.

Mémoires de l'Académie, et mis en usage d'une manière aussi ingénieuse que savante, par l'infortuné Bailly, dans son ouvrage sur l'Astronomie indienne. Depuis cette époque, des communications importantes ont été faites par plusieurs de nos savans concitoyens, membres de la Société de Calcuta, et par d'autres amateurs de la science, tels que, MM. Williams Jones, Samuël Davis, Edouard Strachey et beaucoup d'autres; et l'on a maintenant acquis la certitude que les Indiens ont dû être en possession, quelques milliers d'années avant l'ère chrétienne (trois à quatre mille ans au moins), de plusieurs observations astronomiques très-exactes, et des règles de calcul; règles qui supposent une grande connaissance de la Géométrie, de deux Trigonométries, et l'usage de Tables bien faites des sinus et des sinus verses; le tout à une époque où l'Europe était plongée dans une profonde barbarie, si toutefois elle était habitée. (*Voyez* sur cette matière un Mémoire très-important de Samuël Davis, dans le second volume des Recherches Asiatiques, et deux savantes dissertations sur la Trigonométrie et l'Astronomie indiennes par le professeur Playfair, dans les deuxième et quatrième volumes des Transactions philosophiques d'Edimbourg.)

Nous ne nous occuperons ici principalement que de l'état de l'Algèbre dans cette contrée orientale. On a pensé depuis longtems qu'un peuple qui avait acquis tant de connaissances dans les diverses branches de Mathématiques, ne pouvait pas être resté étranger à l'art algébrique; aussi sommes-nous maintenant parvenus à nous procurer des preuves certaines de son esprit de pénétration dans cette partie de la science. On a trouvé des ouvrages sur l'Algèbre, composés dans la langue du pays, ou traduits de cette langue en persan. Quelques-unes de ces traductions persanes sont en ce moment entre les mains de M. Davis, Baronnet de Hil-Street et l'un des directeurs de la Compagnie des Indes Orientales. Les traductions persanes sont en partie accompagnées d'une traduction anglaise.

M. Edouard Strachey, déjà cité, a fait passer en Angleterre quelques autres traductions d'ouvrages de même genre; comme j'ai eu l'avantage de m'en servir, je vais tâcher d'en donner ici une idée.

Le premier ouvrage communiqué par M. Strachey, est un Mémoire imprimé sur l'originalité, l'étendue et l'importance des connaissances mathématiques des Indiens, avec quelques extraits de la traduction persane de deux ouvrages indiens nommés, l'un le Leelawuttée, et l'autre le Beej Gunnit ou bien Beja Ganita, selon l'orthographe de M. Davis. M. Strachey nous apprend que ces deux ouvrages ont été composés tous les deux par Bhasker Acharij,

célèbre mathématicien et astronome indou, qui vivait vers le commencement du 13e siècle de l'ère chrétienne. Le dernier de ces deux traités, relatif à l'Algèbre et à ses applications, a été traduit en langue persane par Utta Ulla Rusheedee, en 1634, probablement à Agra ou à Dehli. Le Leelawuttée a été traduit dans la même langue, en 1587, par le célèbre Fyzee.

Notice de M. Strachey.

C'est un fait bien constaté, dit M. Strachey, que les Perses ont appris leurs sciences des Arabes, et que ceux-ci doivent beaucoup de leurs connaissances mathématiques aux Grecs; mais il n'en est pas moins certain que l'arithmétique des Arabes leur est venue des Indiens, et il devient très-probable que leur algèbre est venue de la même source; le tems de l'introduction de cette science parmi les Arabes, et les autres circonstances qui accompagnèrent cette introduction, sont entièrement inconnus.

Quoi qu'il en soit, il paraît que l'Astronomie cultivée sous le règne de al Mamoon, est la plus ancienne des sciences mathématiques indiennes introduites chez les Arabes. Dans des tems plus récens, plusieurs Mahométans se sont occupés de livres indous; on en trouve une Notice dans l'Ayeen Ackbery, et dans l'ouvrage d'Herbelot. Abul Fuzl contient une liste d'ouvrages sanscrits, traduits en langue persane du tems d'Akbar, parmi lesquels le Leelawuttée est le seul qui traite des Mathématiques.

Si l'on compare l'Algèbre des Grecs, des Arabes et des Européens d'aujourd'hui, avec les traductions persanes du Leelawuttée et du Beej Gunnit, il en résulte, avec beaucoup de probabilité, que l'Algèbre des Arabes diffère entièrement de l'Algèbre de Diophante, que l'un n'est pas déduit de l'autre; que les Arabes n'ont pas poussé bien loin au-delà de ce qu'ils ont pris des Indiens; que le Leelawuttée et le Beej Gunnit renferment les principes nécessaires pour résoudre toutes les questions de l'Algèbre de Diophante et de l'Algèbre des Arabes; que dans ces traductions se trouvent des questions résolues d'après des principes auxquels l'Algèbre de Diophante et l'Algèbre des Arabes ne sauraient suppléer; enfin, que les Indiens étaient plus avancés dans toutes les parties de cette science, que ne le furent les Européens avec tous les progrès qu'ils avaient fait faire à cette science jusque vers le milieu du 18e siècle.

Sur les séries; extraits du Leelawuttée.

La traduction du Leelawuttée renferme un chapitre sur les combinaisons, et un autre sur les progressions. Nous allons en rapporter quelques exemples.

Combinaisons.

« Trouver le nombre de mélanges dont différentes choses sont
» susceptibles ?
» Ecrivez sur une même ligne la suite des nombres naturels,
» en commençant par le nombre de choses, et en finissant par
» l'unité. Au-dessous écrivez la même suite dans un ordre inverse,
» de manière que le nombre 1 soit au commencement; divisez le
» premier terme de la première suite par le nombre correspon-
» dant inférieur. Le quotient est le nombre de combinaisons des
» choses prises une à une. Multipliez ce quotient par le deuxième
» terme de la ligne supérieure, et divisez le produit par le deuxième
» terme correspondant inférieur. Le quotient est le nombre des
» combinaisons des choses prises deux à deux; on multiplie de-
» rechef ce quotient par le troisième terme de la ligne supérieure,
» et on divise le produit par le terme correspondant de la ligne
» inférieure, et ainsi de suite; si l'on fait ensuite la somme de
» tous les quotiens qu'on a obtenus, on aura le nombre total de
» combinaisons dont ces choses sont susceptibles. »

« *Exemple*. Les six saveurs appelées en indien *Khut rus*,
» sont, 1° le sucré, 2° le salé, 3° l'aigre, 4° le doux, 5° l'amer,
» 6° l'âcre. Je veux connaître le nombre de mélanges qu'on peut
» produire en combinant ces saveurs entr'elles de toutes les ma-
» nières possibles. Ecrivez ainsi :

$$\left\{\begin{matrix} 654321 \\ 123456 \end{matrix}\right\}; \text{ ensuite } \frac{6}{1} = 6, \ \frac{6 \times 5}{2} = 15,$$

$$\frac{15 \times 4}{3} = 20, \ \frac{20 \times 3}{4} = 15, \ \frac{15 \times 2}{5} = 6, \ \frac{6 \times 1}{6} = 1,$$

» la somme de tous les quotiens est 63; ainsi le nombre total des
» combinaisons cherchées est 63. »

Toutes les règles de l'algèbre sont exprimées dans cet ouvrage de la même manière, en phrases très-longues, qui dans des cas compliqués, induisent aisément en erreur, et rendent ces règles difficiles à suivre; tandis qu'on comprend ces règles, pour ainsi dire, à la seule inspection, en se servant des notations en usage parmi nous.

PROGRESSIONS.

Des Progressions croissantes.

« Elles sont de plusieurs espèces : 1°. la progression par 1, c'est-
» à-dire une progression dont chaque terme surpasse d'une unité

» le précédent. Pour trouver la somme de cette progression il faut
» ajouter 1 au dernier terme, et multiplier ensuite par la moitié
» de ce terme. Pour trouver ensuite la somme des termes pro-
» venant de l'addition continuelle des termes de la première pro-
» gression, ajoutez deux au nombre de termes, multipliez par
» le dernier terme, et divisez par trois; le quotient sera la somme
» des termes de la seconde suite. »

Ces règles se réduisent, comme on voit, à trouver la somme des nombres naturels et la somme des nombres triangulaires.

On trouve ensuite dans la traduction persane, une règle pour la sommation des carrés et des cubes des nombres naturels. La somme des n premiers termes de la première série est égale à $\frac{2n+1}{3}.S$ et la somme des n termes de la deuxième série est S^2, S étant la somme des n premiers termes de la progression naturelle.

Nous avons exprimé ces règles par la notation usuelle, et nous ferons de même à l'égard des règles pour les progressions arithmétiques en général, qu'on trouve dans le même ouvrage, à la suite de celles que nous venons de donner. Ces règles sont renfermées dans ces équations

$$(n-1)\,d+a=z;\ \frac{z+a}{2}=m;\ mn=S;$$

$$\frac{S}{n}-(n-1)\frac{d}{2}=a;\ \frac{\left(\frac{S}{n}-a\right)}{\frac{1}{2}(n-1)}=d,$$

$$\frac{\sqrt{[2dS+(a-\frac{1}{2})^2]}-(a-\frac{1}{2}d)}{d}=n;$$

a étant le premier terme, m le terme moyen, z le dernier terme, d la différence, S la somme.

L'auteur indou a déduit la dernière de ces formules de la précédente, en résolvant une équation du deuxième degré assez compliquée, et dont la résolution suppose une grande habitude dans ces sortes d'opérations.

Après ces règles sur la progression arithmétique, vient immédiatement une règle pour trouver la somme d'une progression géométrique (*). Elle ne diffère pas de la nôtre, et nous fait voir que les Indiens avaient des signes particuliers pour la multiplication et l'élévation des puissances.

(*) Nous la supprimons parce que son énoncé est très-obscur dans la traduction anglaise. (*Note du Traducteur français.*)

Il n'est pas bien sûr qu'on ait connu en Europe, avant le seizième siècle, quelques-unes des règles contenues dans ces deux chapitres du Leelawuttée. Pelletarius, dans son Algèbre imprimée en 1558, donne une Table des carrés et des cubes des nombres naturels, et entr'autres propriétés de ces nombres, il fait remarquer que la somme des nombres cubiques, en partant de l'unité, est toujours un carré dont la racine est égale à la somme des racines de ce nombre. Cette propriété s'accorde avec la règle du Leelawuttée rapportée ci-dessus. Il ne paraît pas que les connaissances des Indiens sur les nombres figurés s'étendissent au-delà de ce que nous venons d'en citer.

Sur la Mesure du Cercle et de la Sphère; extrait du Leelawuttée.

Le Leelawuttée donne les règles suivantes pour trouver la mesure du cercle, et celle de la sphère.

Pour trouver la longueur d'une circonférence de cercle, multipliez son diamètre par 3927 et divisez le produit par 1250, ou bien, multipliez le diamètre par 22 et divisez le produit par 7. Nous voyons ici deux approximations; celle de 22 à 7 est la même que celle d'Archimède; l'autre approximation revient à celle de 1 à 3,1416, rapport du diamètre à la circonférence, plus exact que celui des Européens avant les travaux de Viete. Parmi d'autres règles de géométrie, nous rapporterons les suivantes exprimées à notre manière, dans lesquelles D désigne le diamètre, et C la circonférence

$$\tfrac{1}{4}\, C\, D = \text{aire du cercle},$$
$$C\, D = \text{surface de la sphère},$$
$$\tfrac{1}{6}\, D^2\, C = \text{solidité de la sphère},$$
$$\tfrac{3927}{5000}\, D^2 = \text{aire du cercle},$$
$$\frac{D}{2} + \frac{D^3}{\frac{2}{20}} = \text{la solidité de la sphère.}$$

Cette dernière formule est vicieuse, apparemment par une faute d'impression. Nous l'avons rétablie par celle-ci qui doit être la véritable,

$$\frac{D}{2} \times \frac{D^2}{\frac{20}{21}} = \tfrac{21}{40}\, D^3 = 0{,}525\, D^3.$$

Cette dernière évaluation diffère très-peu de la nôtre qui est 0,523623.

D désignant le diamètre, C la corde, V le sinus verse de l'arc a,

on a l'équation $\frac{1}{2} D - \frac{1}{2} \sqrt{(D^2 - C^2)} = V$. Ce théorème est d'une exactitude géométrique; l'auteur en déduit celui-ci $2\sqrt{(DV-V^2)}=C$. Mais les deux théorèmes qu'il donne ensuite ne sont que des approximations ; ils sont renfermés dans ces deux équations

$$\frac{4aD(c-a)}{\frac{5}{4}c^2 - a(c-a)} = C, \text{ où } c \text{ désigne la circonférence.}$$

La corde C est trop grande presque d'$\frac{1}{58}$ partie de sa longueur pour un arc de deux degrés, l'expression étant exacte jusqu'à la quatrième figure décimale inclusivement ; et elle donne la corde trop grande de la soixante-sixième partie de sa longueur pour un arc de 30 degrés, l'expression n'étant exacte que jusqu'à la troisième figure décimale ; mais on ne voit pas comment ils sont parvenus à cette formule (*). La seconde équation est

$$\frac{c}{2} - \sqrt{\left(\frac{c^2}{4} - \frac{\frac{5}{4}c^2 C}{4D+C}\right)} = a.$$

(*) *Note de M. Servois, professeur aux Écoles Royales Militaires d'Artillerie.*

On a pour le rayon 1 et la circonférence 2π,

$$\sin a = a\left\{1 - \frac{a^2}{2.3} + \text{etc.}\right\}$$

a étant un arc de la circonférence 2π. Le sinus du même arc a en parties du rayon de la circonférence c, sera

$$\sin a = \frac{2\pi a}{c}\left\{1 - \frac{4\pi^2}{6}\frac{a^2}{c^2} + \text{etc.}\right\}$$

En s'en tenant aux deux premiers termes du développement, on a une formule approximative d'autant plus exacte, que l'arc a sera plus petit, en faisant $\frac{a}{c} = x$, $\pi = 3{,}14$,

$$\sin a = 6{,}28x\,(1 - 6{,}57x^2),$$

ou bien
$$\sin a = 6{,}28x\left\{1 - x\sqrt{6{,}57}\right\}\left\{1 + x\sqrt{6{,}57}\right\}$$
$$\sin a = 6{,}28x\left\{1 - 2{,}56x\right\}\left\{1 + 2{,}56x\right\},$$

ou bien encore parce que $1 + 2{,}56x = \frac{1}{1 - 2{,}56x + (2{,}56x)^2}$

$$\sin a = 6{,}28x\left\{\frac{1 - 2{,}56x}{1 - 2{,}56x(1 - 2{,}56x)}\right\}$$

Dans cette formule on peut altérer un tant soit peu le coefficient numérique, pourvu qu'on en laisse un à déterminer, par la condition que la formule soit exacte dans un cas particulier, pris parmi ceux où la formule commence à s'écarter sensiblement de la vérité : ainsi écrivons

$$\sin a = 6{,}4x\left\{\frac{1 - 2x}{1 - Ax(1 - 2x)}\right\} \ldots (1),$$

et supposant que la formule est vraie pour l'arc $a = 30°$ (1ere division), alors

Elle est tirée de la première, en résolvant l'équation du second degré.

Nous allons extraire du même ouvrage les expressions des longueurs des côtés des figures régulières inscrites dans les circonférences.

			Corrections.
triangle...........	$\frac{130123}{120000}$ *D.*	triangle...........	$\frac{103923}{120000}$ *D.*
carré..............	$\frac{84853}{120000}$ *D.*		
pentagone..........	$\frac{70534}{120000}$ *D.*		
hexagone	$\frac{60000}{120000}$ *D.*		
heptagone..........	$\frac{52055}{120000}$ *D.*	heptagone..........	$\frac{52070}{120000}$ *D.*
octogone...........	$\frac{45922}{120000}$ *D.*		
nonagone...........	$\frac{41031}{120000}$ *D.*	nonagone...........	$\frac{41042}{120000}$ *D.*

Trois de ces nombres sont fautifs apparemment par une faute du copiste, on a corrigé ces nombres dans la colonne adjacente.

$x = \frac{1}{12}$: ainsi on a pour déterminer A, l'équation

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{6,4}{12}\left(1 - \frac{1}{6}\right)}{1 - \frac{A}{12}\left(1 - \frac{1}{6}\right)} = \frac{\frac{4}{9}}{1 - \frac{5}{72}A},$$

d'où

$$A = \frac{8}{5}.$$

Ainsi l'équation (1) devient

$$\sin a = \frac{6,4x\,(1 - 2x)}{1 - \frac{8}{5}x\,(1 - 2x)} = \frac{8x\,(1 - 2x)}{\frac{5}{4} - x\,(1 - 2x)},$$

ou bien

$$\sin a = \frac{8a\,(c - 2a)}{\frac{5}{4}c^2 - 2a\,(c - 2a)},$$

mais $\sin a = \frac{1}{2}$ cord. $2a$; donc

$$\text{cord. } 2a = \frac{8.\,2a\,(c - 2a)}{\frac{5}{4}c^2 - 2a\,(c - 2a)},$$

ou bien, en changeant $2a$ en a

$$\text{cord. } a = \frac{8a\,(c - a)}{\frac{5}{4}c^2 - a\,(c - a)},$$

c'est-à-dire dans l'hypothèse du diamètre $= 2$; lorsque le diamètre sera D, et la circonférence c, on aura

$$\text{cord. } a = \frac{4a\,D\,(c - a)}{\frac{5}{4}c^2 - a\,(c - a)};$$

c'est la formule de l'indou.

Fin de la Note de M. Servois.

Sur les Équations radicales du second degré ; extrait du Leelawuttée et Beij Gunnit.

La résolution des équations radicales du second degré est présentée ainsi dans la traduction du Leelawuttée.

« Lorsque le produit de la racine du nombre pensé, multiplié » par un nombre connu, est donné, et que la somme de ce produit, ajoutée au nombre pensé, ou que la différence de ce produit, retranchée du nombre pensé, est aussi donnée, il faut, » pour trouver ce nombre pensé, suivre cette règle : prenez la » moitié du multiplicateur de la racine, et élevez cette moitié au » carré ; ajoutez à ce carré le second nombre donné ; extrayez la » racine carrée de cette somme ; ajoutez ou retranchez la moitié du » multiplicateur de la racine, selon qu'il s'agit dans la question, » d'une soustraction ou d'une addition. Élevez le résultat au » carré, et ce carré est le nombre pensé. »

Cette règle s'accorde parfaitement avec nos procédés. En effet, en mettant la question en équation, il vient,

$$x \pm a\sqrt{x} = b \text{ ; d'où l'on tire,}$$
$$x = \left(\sqrt{\tfrac{1}{4}a^2 + b} \pm \tfrac{1}{2}a\right)^2 ;$$

Lorsque le multiplicateur du nombre pensé est fractionnaire, on donne dans l'ouvrage la règle suivante pour débarrasser le nombre pensé de son multiplicateur.

« Lorsque le nombre pensé est augmenté ou diminué de ce » même nombre pensé, multiplié par une fraction, il faut procéder ainsi. Augmentez ou diminuez la fraction de l'unité, divisez le multiplicateur du nombre pensé et le second nombre » donné respectivement par cette somme ou cette différence, et » traitez le quotient comme il a été enseigné ci-dessus. »

En effet, faisant usage de notre notation, on obtient l'équation $x \pm \frac{1}{m}x \pm a\sqrt{x} = b$, divisant les deux nombres par $1 + \frac{1}{m}$, il vient $x \pm \dfrac{a}{1+\frac{1}{m}} = \dfrac{b}{1+\frac{1}{m}}$; d'où l'on tire comme ci-dessus, en remplaçant a et b par les quotiens $\dfrac{a}{1+\frac{1}{m}}$, $\dfrac{b}{1+\frac{1}{m}}$.

la valeur de l'inconnue.

$$x = \left\{\sqrt{\left[\left(\frac{\frac{1}{2}a}{1+\frac{1}{m}}\right)^2 + \frac{b}{1+\frac{1}{m}}\right]} \mp \frac{\frac{1}{2}a}{1+\frac{1}{m}}\right\}^2$$

La traduction du Beij Gunnit renferme les mêmes objets, mais ils sont traités d'une manière plus obscure. Voici un exemple de résolution de l'équation du second degré, $ax^2 + bx = C$.

« Multipliez tous les termes par $4a$, il vient

$$4a^2x^2 + 4abx = 4ac;$$

» ajoutez le carré de b aux deux nombres, on obtient ceci

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 + 4ac,$$

» d'où l'on tire

$$» \; x = \frac{\sqrt{(b^2 + 4ac)} - b}{2a}. \; »$$

Ce procédé par lequel on évite les fractions, est plus aisé que le nôtre en pareil cas.

L'auteur s'exprime sur les deux valeurs qu'on obtient dans une équation du second degré, en ces termes ;

« Lorsque la chose se trouve d'un côté, les nombres étant
» négatifs, et que les nombres de l'autre côté sont moindres que
» les nombres négatifs du premier côté, il y a deux méthodes à
» suivre : la première consiste à égaler ces nombres entr'eux sans
» les changer ; la seconde consiste à rendre négatifs les nombres
» du second côté, s'ils sont positifs, et à les rendre positifs s'ils
» sont négatifs ; formez ensuite l'équation, on obtiendra deux
» valeurs, dont l'une satisfera probablement à la question. »

Malgré l'obscurité de cet énoncé, on voit qu'il doit se rapporter à deux racines positives d'une certaine équation radicale du second degré. Les exemples que nous venons d'extraire du Leelawuttée et du Beij Gunnit, nous apprennent que la résolution des équations du second degré était aussi avancée parmi les Indiens que parmi les Arabes, et même chez les Européens, avant le siècle de Cardan. Lucas de Borgo, dont l'ouvrage fut imprimé vers la fin du 15[e] siècle, fait usage des deux valeurs de l'inconnue, dans le cas seulement où ses valeurs sont toutes les deux positives, mais il n'a aucun égard aux racines négatives.

Voici encore un autre exemple d'une équation radicale du second degré, résolue dans le Beija Gunnita.

« Un essaim d'abeilles placé sur un arbre, la racine carrée

» de la moitié du nombre d'abeilles s'envole, et ensuite les $\frac{8}{9}$
» du nombre d'abeilles ; il en reste deux : on demande com-
» bien il y avait d'abeilles ? »

Cette question qui, traitée à la manière ordinaire, en prenant x pour le nombre inconnu d'abeilles, mène à une équation assez compliquée, est résolue avec beaucoup d'adresse dans l'ouvrage indien.

En effet, en prenant x pour l'inconnue cherchée, on est conduit à l'équation,

$$x - \tfrac{8}{9}x - \sqrt{\tfrac{1}{2}x} = 2, \text{ ou bien } \tfrac{1}{9}x - \sqrt{\tfrac{1}{2}x} = 2.$$

L'auteur prend pour inconnue la quantité $2x^2$, qu'il suppose égale au nombre cherché d'abeilles, et obtient ainsi l'équation très-simple,

$$2x^2 - \tfrac{16}{9}x^2 - x = 2, \text{ ou bien, } \tfrac{2}{9}x^2 - x = 2,$$

équation dont la solution est plus aisée.

Des Problèmes indéterminés du second degré ; extrait de Diophante et du Beej Gunnit, ou mieux, du Bija Ganita.

La seizième question du sixième Livre de Diophante est énoncée en ces termes :

« Etant donné deux nombres et un nombre carré tel, qu'en
» retranchant le premier de ces nombres du produit du nombre
» carré, multiplié par le second nombre, le reste est encore un
» carré. On demande à trouver un carré plus grand que le pre-
» mier qui remplisse les mêmes conditions. Soit, par exemple,
» 3 et 11 les deux nombres donnés, et 25 le carré donné ; en
» multipliant 3 par 25, on a 75 pour produit ; si l'on en ôte 11,
» qui est le second nombre, le reste 64 est le carré parfait ; il
» s'agit de trouver un carré plus grand que 25, qui jouisse de la
» même propriété à l'égard des nombres 3 et 11 ; supposons que
» $N + 5$ est la racine du carré cherché, le carré de cette quan-
» tité est $N^2 + 10N + 25$; le triple de ce carré, diminué de 11,
» laisse pour reste la quantité $3N^2 + 30N + 64$, qui, d'après la
» question, doit être un carré parfait ; supposons la racine égale
» à $N - 8$; on tire de cette supposition, (en formant l'équation)
» $N = 62$, et $N + 5 = 62 + 5 = 67$; $67^2 = 4489$; ainsi 4489
» est le carré demandé. »

Dans le Bija Ganita, ce même problème est aussi résolu, mais par une méthode plus générale et plus scientifique, et à

l'aide d'un autre problème qui est resté inconnu en Europe jusque vers le milieu du 17ᵉ siècle, et n'a été appliqué aux questions de ce genre, que vers le milieu du 18ᵉ siècle, par Euler. Lorsque l'équation indéterminée a cette forme, $ax^2 + b = y^2$, le Bija Ganita indique ce moyen pour trouver de nouvelles valeurs. Soit $ag^2 + 6 = h^2$ un cas particulier; cherchez deux nombres m et n qui satisfassent à l'équation $an^2 + 1 = m^2$; et posant $\begin{Bmatrix} x = mg + nh \\ y = mh + ng \end{Bmatrix}$, les nombres x et y satisfont à l'équation proposée.

On trouve dans le quatrième et le cinquième chapitre du Bija Ganita, des méthodes générales pour la résolution des équations indéterminées des deux premiers degrés, et qui diffèrent entièrement des méthodes dont Diophante s'est servi. Selon l'opinion de M. Strachey, qui paraît extrêmement probable, l'ouvrage indou abonde en théorèmes et en artifices très-ingénieux, qu'on chercherait vainement chez les Grecs. Tels sont, par exemple, l'emploi d'un nombre indéfini de quantités inconnues et de signes propres à les présenter, une bonne arithmétique des irrationnels, une théorie complète des équations indéterminées du premier degré, et une connaissance assez étendue des équations indéterminées du second degré. La disposition et la méthode des deux ouvrages indou et grec, diffère autant que leurs contenus. Le Bija Ganita forme un corps régulier de doctrine. Il n'en est pas ainsi de l'ouvrage de l'analyste grec. Le premier présente un ensemble dont les parties sont bien liées et bien développées, abondant en règles dont le caractère de généralité dénote une science profonde; ces règles sont éclaircies par des exemples, et les solutions sont préparées avec art. Le dernier, quoique non entièrement dépourvu de méthode, donne peu de règles générales, et se distingue principalement par l'art et l'habileté de l'auteur, dans le choix des suppositions qu'il fait pour parvenir aux solutions de ses questions particulières. L'ordre systématique de l'ouvrage indou fait apprendre l'algèbre comme une science; tandis que l'ouvrage grec augmente la pénétration de l'esprit, par le grand nombre de solutions ingénieuses, de problèmes très-difficiles qu'il contient. Le Bija Ganita est la production d'un compilateur savant et laborieux; Diophante s'annonce comme un homme de génie qui écrit sur une science encore dans l'enfance.

A ces renseignemens, extraits principalement, comme il a été dit, de la notice imprimée de M. Strachey, je vais joindre d'autres particularités curieuses concernant les deux ouvrages indous, et que j'ai apprises récemment de M. Davis, baronnet. De plus, feu M. Reubou Burrow a recueilli dans les Indes

beaucoup de manuscrits sanscrits et persans, qui traitent des Mathématiques. Les ouvrages persans sont des traductions d'originaux sanscrits. Ce savant orientaliste a légué plusieurs de ses manuscrits à un fils qui est en Angleterre, avec la condition de ne les lui remettre que lorsqu'il aura acquis la connaissance des langues et des sciences. Il a aussi légué un ou deux manuscrits à son ami M. Dalby, professeur de Mathématiques à l'École royale militaire de Wycombe; les traductions persanes du Bija Ganita et du Lilawati, avec l'essai d'une traduction anglaise de ces ouvrages, sont déjà entre les mains de ce professeur. Cette traduction, ébauchée par M. Burrow, écrite au crayon interlinéairement, court risque d'être effacée; heureusement M. Dalby vient de recevoir de M. Strachey, maintenant aux Indes, une traduction anglaise complète du Bija, que j'ai eue pendant quelques tems à ma disposition. A cette complaisance M. Dalby a ajouté celle de m'envoyer des remarques descriptives sur les manuscrits originaux persans. Ce sont là les sources où j'ai puisé les renseignemens que je vais transcrire.

Le premier ouvrage porte pour titre ce mot : le Beej, ou le Beej Gunnit (c'est la prononciation des Indiens; mais ils écrivent Bija Ganita), et paraît avoir été traduit en persan vers l'année 1634; M. Burrow désigne l'Algèbre par le seul mot le Beij; mais dans l'Introduction persane on trouve ces deux passages :

« Le Beij Gunnit. L'auteur est Bhasker Acharya, auteur du » Leelawutée. » « Cette excellente méthode de calcul est traduite » en persan de l'indou, et se nomme le *Livre de la Composition* » *et de la Résolution.* » Les deux mots indiens traduits ici par ces mots composition et résolution, sont dans d'autres endroits rendus par le seul mot « Algèbre ». Les deux mots persans qui répondent à Bija Ganita en diffèrent matériellement; ensorte que les auteurs persans et arabes paraissent s'être attachés au sens plutôt qu'à la prononciation du sanscrit. Un commentaire du traducteur persan, sur l'original sanscrit, remplit une partie du manuscrit. Dans un endroit il fait mention d'un Dictionnaire d'algèbre, sans citer ni l'auteur, ni la date.

L'ouvrage, divisé en cinq parties ou livres, commence par l'explication des quantités positives et négatives, qu'il caractérise par des termes désignant l'existence et la non-existence, ce qui est analogue aux idées de propriété et de dette dont nous nous servons quelquefois pour expliquer la nature de ces quantités. Les quatre premières opérations viennent ensuite, comme chez nous. De là on passe au calcul des irrationnels, qui est traité avec beaucoup d'étendue; on croit même y apercevoir une méthode générale pour développer les puissances d'un polynome irration-

nel, et qui paraît avoir quelqu'analogie avec nos règles combinatoires. Ensuite viennent des problèmes d'analyse indéterminés, qui se suivent dans cet ordre :

Problèmes sur les carrés. Par exemple (en se servant de notre notation). Trouver des carrés parfaits de la forme $67x^2+1$, $61x^2+1$, $13x^2+1$, ou en général de la forme ax^2+b.

Problèmes qui mènent à des équations du premier degré, application aux propriétés des triangles.

Problèmes sur les carrés. Par exemple. Faire que $x \pm y$ et xy soient tous les deux des carrés parfaits ; faire que x^3+y^3 et x^2+y^2 soient des carrés parfaits ensemble.

Quelques problèmes qui mènent à des équations du second degré.

On dit aussi quelque chose de l'équation du troisième degré ; mais l'auteur paraît avoir senti l'impossibilité de résoudre cette équation généralement. On y trouve l'énoncé très-concis d'une règle qui permet de soupçonner seulement l'existence d'une solution mécanique ; car il y a ici une lacune dans la traduction.

Plusieurs problèmes sur les carrés. Exemple. Trouver des nombres entiers qui rendent carrés parfaits les expressions suivantes :

$$\left.\begin{matrix} x+y \\ x^2+y^2 \end{matrix}\right\} \text{ensemble} ; \quad \left.\begin{matrix} 7x^2+8y^2 \\ 7x^2-8y^2+1 \end{matrix}\right\} \text{ensemble} ; \quad \left.\begin{matrix} x^2+y^2 \\ x+y \end{matrix}\right\} \text{ensemble} ;$$

$$\left.\begin{matrix} x-y+2 \\ x+y+2 \end{matrix}\right\} \text{ensemble} ; \quad \left.\begin{matrix} x^2-y^2+1 \\ x^2+y^2+1 \end{matrix}\right\} \text{ensemble} ;$$

$$\left.\begin{matrix} x-y = \text{un carré} \\ x^2+y^2 = \text{cube} \end{matrix}\right\} \text{ensemble} ; \quad \text{etc.}$$

Finalement, toutes sortes de questions indéterminées, dans le genre des questions de Diophante, sans être les mêmes que celles de cet auteur. Cette circonstance seule prouverait une différence d'origine qui est déjà constatée par la différence dans les moyens de solution. Ces questions sont quelquefois assez difficiles ; M. Burrow a écrit en marge les solutions de quelques-unes, d'après les procédés en usage parmi nous.

On trouve dans le même ouvrage trois à quatre problèmes indéterminés qui se rapportent au triangle rectangle. Là on s'attend naturellement à voir citer la 47e proposition du premier livre d'Euclide. Mais au lieu de cette proposition on cite la figure de la chaise nuptiale. De cette circonstance, et de quelques autres ouvrages des Indiens, nous pouvons conclure qu'ils connaissaient ce théorème et plusieurs autres de notre géométrie, et il est très-probable que c'est chez eux que Pythagore a puisé

toutes ses connaissances, qu'il a apportées ensuite à ses compatriotes, après son retour en Grèce.

Les opérations avec le zéro se font comme parmi nous. Burrow traduisit d'abord le quotient $\frac{a}{0}$ par le mot *infini*; il a ensuite effacé ce mot et l'a remplacé par ceux-ci : *n'est pas compréhensible.* Apparemment qu'il entendait par là *être inassignable.*

Quant à la notation employée dans le manuscrit, il paraît que les quantités inconnues sont représentées par des lettres ou des caractères qui portent en partie le nom des couleurs. Quand il n'y a qu'une seule inconnue, elle est désignée par un caractère particulier nommé *majool.* Lorsqu'il y a deux inconnues, la seconde prend le nom de *aswad*, qui veut dire *noire.* Dans le cas d'une troisième inconnue, elle porte le nom de *neelok* (*bleue*); la quatrième est dite *jaune*, etc.

Le Majool a pour marque (*voyez* la planche première.)

Aswaad.............

Neelok..............

Les autres marques sont plus simples.

Le signe positif est , et le signe négatif est .

Le signe pour la quantité inconnue ou cherchée d'une équation est ; toutes ces marques sont des mots arabes qui indiquent certaines opérations à faire. Le nom technique de la quantité inconnue est *chose*, voulant par là désigner expressément la chose qui donne lieu à la question ou à la recherche. Il est à remarquer que les premiers auteurs italiens qui ont écrit sur l'Algèbre, ont pris le mot *cosa* pour désigner l'inconnue. De là cette science et les nombres cherchés furent long-tems connus en Europe sous les noms d'*art cossique* et de *nombres cossiques.*

Le caractère suivant , placé à côté de l'inconnue, signifie qu'il faut élever l'inconnue au carré; celui-ci , qu'il faut élever l'inconnue au cube. Il y a aussi une marque qui indique l'extraction de la racine carrée, et une autre pour l'extraction de la racine cubique. Les puissances supérieures sont formées et dénommées en répétant et combinant ces signes entr'eux. Ainsi la quatrième puissance est nommée *carré-carré;* la cinquième, *carré-cube;* la sixième, *cube-cube*, et ainsi de suite, en combinant les puissances par voie de multiplication.

Il ne paraît pas qu'il y ait de signe analogue à celui dont nous nous servons pour unir les quantités composées entr'elles.

Chaque formation d'équation est précédée de ces mots *j'égale* ou *égalant*, et toutes les opérations en général sont décrites en

phrases très-longues. Toutefois M. Davis m'apprend que dans les originaux sanscrits, les Indiens, au lieu de se servir de la notation verbale que nous avons rapportée ci-dessus, abrègent les mots et n'en prennent que les lettres initiales, usage pratiqué long-tems en Europe.

Les Indiens emploient ces lettres initiales, comme nous les lettres a, b, c pour représenter des nombres. Ce signe || marque l'addition. Ainsi $a \| b \| x$ équivaut à $a + b + x$. Un point placé sur la lettre indique que la quantité est négative ou soustractive. Pour désigner la multiplication, on écrit les facteurs à côté les uns des autres, sans interposition de signe, comme chez nous; ainsi $ab\dot{x}$ veut dire $a \times b \times -x$; ils écrivent à côté de la quantité la lettre initiale du mot qui désigne l'exposant de la puissance ou de la racine qui doit affecter la quantité. Par exemple, c étant la lettre initiale du mot carré, ils écrivent ac pour dire qu'il faut élever au carré la quantité a; de même ar équivaut à $\sqrt{a}$, r étant l'initiale du mot racine.

Ce signe est placé à la droite de la quantité, au lieu que nous le plaçons à gauche.

M. Davis m'informe, de plus, que les caractères sanscrits dont les Indiens se servent pour désigner les inconnues ont cette forme . M. Charles Wilkins, libraire de la Compagnie des Indes Orientales, a eu la bonté de me fournir les caractères d'imprimerie et de m'en donner l'explication. Le premier caractère se prononce *pa;* c'est la syllabe initiale du mot *pandu*, qui veut dire blanc.

Le second se prononce *kā*, initiale de *kala*, noire.
Le troisième......... *nī*, initiale de *nila*, bleu.
Le quatrième........ *pī*, initiale de *pila*, jaune.
Le cinquième........ *lō*, initiale de *lōhită*, rouge.

Voici maintenant, selon M. Wilkins, les étymologies des noms sanscrits des deux ouvrages. *Lilawati* est un adjectif du genre féminin, dérivé du mot *lila*, qui signifie également jeu, amusement, plaisirs, recherches, efforts; ensorte que le titre peut également se traduire par *Livre de Recréations*, ou *Livre de Recherches*. — *Bija*, proprement dit *Vija*, signifie une semence, ou l'origine de quelque chose. *Ganita* est le participe passé du verbe *gān*, qui veut dire compter, calculer, etc.; ainsi *bija gannita* est une épithète composée qui, traduite littéralement, signifie la semence calculée, la source ou la racine calculée.

Il est bon d'observer que les titres des ouvrages sanscrits indiquent rarement leurs contenus. Il faut encore observer que dans ces der-

niers ouvrages, les signes positifs et négatifs et les coefficiens sont toujours placés à la droite de la quantité qu'ils affectent; ainsi pour exprimer le produit $+2xy$, on y trouve $2xy+$, ou bien $xy2+$. Cette dernière manière est surtout d'usage dans les traductions persanes, parce que l'écriture persane se lit de droite à gauche, tandis que le sanscrit se lit de gauche à droite, comme la nôtre.

Nonobstant cette différence dans le sens de l'écriture, les Persans n'emploient et ne traduisent pas à rebours les nombres sanscrits. *Exemple.* Le manuscrit sanscrit sur l'Algèbre contient cent cinquante-trois feuilles ; ce nombre est exprimé dans la traduction persane par [*pl.* 1re,] (153) ; ces caractères sont arabes et diffèrent aujourd'hui des caractères indous, quoiqu'ils soient évidemment dérivés de celui-ci. Cette circonstance ajoute à la probabilité de l'opinion que les Persans ont tiré l'art de calculer des Indiens, mais indirectement, en le tenant de seconde main des Arabes.

Dans la traduction persane, les termes résultans de la multiplication des deux polynomes sont disposés à l'instar de la Table de Pythagore, ainsi qu'on le voit dans le tableau ci-joint, où l'on a multiplié le polynome $-3x+2y-2$ par le polynome $+4y-x+1$.

	$-3x$	$+2y$	-2
$+4y$	$-12xy$	$8y^2$	$-8y$
$-x$	$+3x^2$	$-2xy$	$+2x$
$+1$	$-3x$	$+2y$	-2

Les calculs ne sont pas distingués du discours; tout est écrit dans la même ligne, comme on en voit des exemples dans les anciens ouvrages de Burgo, de Bombelli, etc.

L'auteur parle toujours à la première personne. *Exemple.* J'opère ainsi ; je multiplie, etc.

Les commencemens des chapitres sont distingués par de l'encre rouge.

J'ai déjà dit plus haut que les Indiens résolvent l'équation du deuxième degré comme nous, en complétant le carré. J'ai remarqué qu'ils ont une méthode semblable pour résoudre dans quelques cas les équations des troisième et quatrième degrés. Voici des exemples tirés du Bija.

Soit l'équation $x^3+12x=6x^2+35$; en soustrayant des deux membres, $6x^2+8$, il vient $x^3-6x^2+12x-8=27$.

Les deux membres sont des cubes parfaits; extrayant de part et d'autre la racine cubique, on a $x-2=3$;

d'où $x=5$.

Soit encore l'équation $x^4-400x-2x^2=9999$,

équation qui n'est pas facile à compléter. L'auteur ajoute d'abord aux deux membres le binome $400x+1$, et il obtient la nouvelle équation $x^4-2x^2+1=400x+10000$; extrayant de part et d'autre la racine carrée, il vient $x^2-1=\sqrt{400x+10000}$. Comme le second membre n'est pas carré parfait, l'auteur revient sur ses pas et prend une autre voie. Il ajoute aux deux membres la quantité $4x^2+400x+1$; il obtient ainsi l'équation $x^4+2x^2+1=4x^2+400x+10000$, dont les deux membres sont des carrés parfaits. Extrayant la racine carrée, il vient $x^2+1=2x+100$;

d'où $x^2-2x+1=100$; extrayant de nouveau la racine carrée, on a $x-1=10$;

d'où $x=11$.

Ce procédé a quelque ressemblance avec celui qui a été pratiqué depuis, sinon imité par Louis Ferrari. Quoi qu'il en soit, à l'exception de quelques cas particuliers, il ne paraît pas que les Indiens aient eu quelque méthode générale de résoudre les équations des troisième et quatrième degrés; car à la suite de l'exemple précédent l'auteur ajoute avec emphase : « La solution de telles questions exige un jugement droit, assisté du secours de Dieu. »

Les solutions de quelques problèmes d'analyse appliquée principalement aux triangles rectangles, qu'on trouve à la fin du premier Livre du Bija, font présumer que les Indiens connaissaient bien les propriétés de Géométrie contenues dans les Elémens d'Euclide. Quelques propositions de cet ouvrage sont citées sous des noms particuliers, et d'autres, selon M. Strachey, portent le quantième de la proposition et du livre d'Euclide; mais il est à croire que la dernière sorte de citation est une addition du traducteur ou du copiste. M. Strachey dit qu'il y a deux exemplaires où les Elémens sont cités sans être dénommés. On cite, par exemple, les quatrième et huitième propositions du deuxième Livre, sans dire de quel ouvrage. La quatrième est textuellement ainsi citée : « Par la quatrième figure du deuxième livre. » Et la huitième, par ces mots : « Par cette figure. » Et la figure pour la démonstration de cette proposition est en marge. La figure de la fiancée est une épithète qui sert à désigner le théorème de Pythagore. Dans un exemplaire on trouve ces mots : « Car la somme des côtés (du triangle) est toujours plus grande que l'hypothénuse pour la proposition à l'âne. »

Parmi les problèmes d'analyse appliquée, on trouve celui-ci : « 15 et 20 étant les deux côtés d'un triangle rectangle, on demande à trouver l'hypothénuse? »

L'auteur fait là-dessus cette observation. « Quoiqu'on sache par
» la figure de la fiancée, que l'hypothénuse est la racine carrée
» de la somme des carrés des deux côtés, pour obtenir une solution
» algébrique du problème, il faut procéder ainsi : supposons le
» triangle divisé en deux autres par la perpendiculaire abaissée du
» sommet de l'angle droit ; calculons le segment du triangle rec-
» tangle qui a 15 pour hypothénuse, et le segment du triangle
» rectangle qui a 20 pour hypothénuse ; établissant ensuite l'équa-
» tion, on aura ce qu'il faut. »

Le langage un peu obscur de l'original se réduit à ceci.

Soit ABC un triangle rectangle en B ; $AB = 20$, et BD une perpendiculaire abaissée sur $BC = 15$

on a $$AD = \frac{20^2}{AC},\quad CD = \frac{15^2}{AC}$$

or $$AD + CD = AC\text{; donc } \frac{15^2 + 20^2}{AC} = \frac{625}{AC} = AC.$$

$$(AC)^2 = 625,\ \text{d'où } AC = \sqrt{625} = 25.$$

Après ce problème, vient immédiatement le théorème suivant :
« le carré de l'hypothénuse d'un triangle rectangle est égal à
» deux fois le rectangle des côtés de l'angle droit, plus le carré
» de la différence de ces côtés. Car en plaçant quatre triangles
» rectangles égaux, de manière que leurs hypothénuses forment
» les côtés d'un carré ; il y a au milieu de ce carré, un petit
» carré dont le côté est égal à la différence des côtés de l'angle
» droit ; et comme l'aire d'un triangle rectangle équivaut à la
» moitié du rectangle de ces côtés, il s'ensuit que l'aire des quatre
» triangles rectangles égaux, est équivalente au double du rec-
» tangle des côtés de l'angle droit, c'est-à-dire, à 600 dans
» l'exemple précédent. A ce nombre, j'ajoute 25, qui est le petit
» carré du milieu (car 5 est la différence des côtés 20 et 15), et la
» somme 625 est le grand carré construit sur l'hypothénuse, d'où
» l'on tire la grandeur de cette hypothènuse ou *chose cherchée*.
» De là on peut conclure aussi que la somme des carrés de deux
» nombres, est égale à deux fois le rectangle de ces nombres,
» plus le carré de leur différence. »

L'original porte en marge la figure (*pl.* 1) de quatre triangles égaux, réunis comme il est dit dans le théorème. Cette nouvelle démonstration du théorème de Pythagore est remarquable, en ce qu'on peut la regarder comme la démonstration indou de cette célèbre proposition. Peut-être même que cette figure géométrique, qui ressemble assez à celle de la chaise dont on se sert dans le pays

Le moyen de rendre rationnelle l'expression $\sqrt{(ax+my)^2+ry}$, en faisant $ax+my=\frac{r-y}{2}$ est indiqué dans l'ouvrage.

Outre ce que nous venons d'extraire, le Bija Ganita renferme plusieurs recherches curieuses qui font présumer, dit M. Strachey, que les Indiens possèdent des ouvrages très-intéressans sur cette branche de l'Algèbre. Il est probable qu'on trouvera dans ces ouvrages une théorie des fractions continues, des méthodes d'approximations et des théories de séries et d'équations. Les règles du cinquième Livre du Bija, et les applications qu'en fait l'auteur, donnent lieu à penser que les Indiens avaient quelques connaissances des courbes et de l'usage des mathématiques dans la philosophie naturelle. Il est donc très-probable, comme nous l'avons déjà avancé, que l'Algèbre est originaire de l'Inde, ainsi que l'Arithmétique. Il est vrai que nous avons à cet égard peu de notions certaines, et que même les Arabes attribuent l'invention de l'Algèbre aux Grecs. Mais cette assertion des Arabes devient très-problématique, quand on considère que l'Algèbre de ce peuple diffère considérablement de l'Algèbre de Diophante, et qu'il est très-douteux que les Grecs aient jamais eu une Algèbre autre que celle de Diophante; d'ailleurs la facilité qu'on avait à Alexandrie de communiquer avec les Indes, rend très-incertaine l'origine grecque de l'Algèbre de Diophante; et la composition bien plus récente du Bija Ganita ne détruit pas cette incertitude; car il ne faut pas oublier que l'ouvrage sanscrit a été précédé par d'autres bien plus anciens, ainsi que l'a très-bien prouvé M. Davis, dans un savant Mémoire sur le cycle de 60 ans, inséré dans les Recherches asiatiques. C'est de ces anciens ouvrages indous, dont l'existence est très-probable, qu'auront été tirés non-seulement le Bija Ganita, mais aussi l'Algèbre des Grecs et des Arabes.

Sur le Lilavati.

Le Lilavati, le second ouvrage indou dont il a été question plus haut, traite des mesures des corps, de l'arithmétique, etc. Dans l'Introduction, nous lisons que « l'auteur de la collection » du Lilavati se nommait Bhasker Acharya, de la ville de » Bidder », sur la frontière septentrionale de l'Indostan. L'époque précise de la publication de l'ouvrage n'est pas bien connue; mais dans un autre ouvrage du même auteur, de l'année 1105[e] du

Salbahan, on trouve les raisons qui ont déterminé Bhasker à composer le Lilavati. Or le Salbahan, suivant la chronologie des Indiens, commence à l'an 80 de notre ère; donc le Lilavati a dû être composé vers l'année 1185 de l'ère chrétienne.

Dans le Ayeen Akbery (ouvrage persan sur l'histoire, les mœurs, les lois des Indiens), nous lisons que « Acharya était » un sectateur de Jina, qui expliquait les difficultés aux élèves. » De là nous pouvons conclure que Bhasker enseignait les mathématiques.

Le Lilavati commence par donner les premières règles de l'Arithmétique, et passe ensuite aux fractions, aux extractions des racines, etc. La règle d'alliage est traitée avec beaucoup d'étendue. Vers la fin on trouve quelque chose sur ce que l'auteur appelle *les formes*, et qui paraît avoir de l'analogie avec nos règles combinatoires.

Les différentes modifications que les chiffres ont subies dans leur forme, et que nous donnerons ici (Voyez la planche 1re.), nous autorisent à croire avec quelque raison, que les chiffres sont d'origine indou et qu'ils nous sont parvenus par l'Arabie, l'Afrique, l'Espagne, etc.; il serait en conséquence plus exact de les nommer chiffres indiens que chiffres arabes.

Dans l'opération de la multiplication, les Indiens procèdent de gauche à droite et reculent successivement les produits partiels d'un rang vers la droite.

Exemple.

```
  12
 135
 ----
 12
  36
   60
 -----
 1620.
```

En résumant ce qui précède, il paraît en résulter que les Indiens possédaient, dans les tems les plus reculés et dans une grande perfection, tout ce qu'on trouve non-seulement dans Diophante, mais aussi chez les Italiens avant les travaux de Tartaglia et de Cardan.

La Notice imparfaite qu'on vient de lire est tirée principalement du commentaire et de la traduction de M. Strachey. Il est à desirer que ce savant achève une entreprise commencée avec tant de distinction, et qu'il fasse bientôt jouir le public d'une production que les talens et les lumières de l'auteur nous garantissent devoir être aussi complète qu'utile.

P. S. Depuis l'impression de la Notice précédente, M. Strachey

m'a envoyé la traduction anglaise de la Préface que le traducteur persan (Fuzy) a mise au Lilavati; comme ce morceau renferme des faits curieux et des détails remarquables, je le transcris ici sous forme de *Post-Scriptum*.

Traduction de la Préface de Fyzi ou Lilavati.

« Par ordre du roi Akber, Fuzi traduit de l'indou en persan » le livre nommé le *Lilavati*, si célèbre par les rares et surpre- » nans artifices de calcul qu'il contient. Il (Fuzi) prend la liberté » de rapporter que l'auteur de cet ouvrage était Bhascare Acharya, » dont le lieu de naissance, ainsi que celui de ses ancêtres, était » la ville de Biddur, dans le pays de Décan. Quoique la date » de l'ouvrage ne soit pas mentionnée, on peut la connaître à » peu près par la circonstance que le même auteur a fait un » autre ouvrage (nommé *Kurrun Kuttohol*) sur l'art de faire » les calendriers, et qui porte pour date la 1105e année du » Salibahan, ère célèbre dans les Indes. Depuis cette époque » jusqu'à l'année actuelle, qui est la 32e Ilahi, correspondant » à la 995e de l'hégire (*), se sont écoulées 373 années.

» On dit que la composition du Lilavati a été occasionnée » par la circonstance suivante. Lilavati était le nom de la fille » de l'auteur (Bashker). L'ascendant de l'étoile qui dominait sa » naissance condamnait cette fille à passer sa vie dans le célibat » et à rester sans enfans. Cependant le père attendait une heure » favorable pour marier sa fille et lui faire contracter une union » stable et féconde. A l'approche de l'heure fatale, il fit venir » auprès de lui son enfant et l'époux qu'il lui destinait, et ayant » posé la coupe horaire près d'un vase rempli d'eau, il choisit » un astrologue connaisseur de l'état du ciel, pour observer le » moment précis où la coupe horaire serait remplie d'eau ; ce » moment devait être celui de l'union des deux époux. Mais les » destins étant contraires à cette opération, il arriva que la jeune » personne, entraînée par une curiosité naturelle à son âge, » regarda dans la coupe horaire pour voir entrer l'eau. Une perle » se détacha accidentellement de son vêtement nuptial et tomba » dans le vase, et s'étant placée devant l'ouverture, elle em- » pêcha l'eau de couler. Cependant l'astrologue était toujours » à attendre l'heure promise. L'opération de la coupe s'étant

---

(*) 1585 de J.-C.

» prolongée de beaucoup au-delà du tems ordinaire, le père » était dans la consternation ; et en examinant l'instrument, il » trouva qu'une petite perle avait bouché l'ouverture et arrêté » le cours de l'eau, et qu'ainsi l'heure si impatiemment desirée » était passée sans retour. Désolé de ce contre-tems, le père » adresse ces paroles à sa fille : Je vais composer un ouvrage » qui portera ton nom et passera aux tems les plus reculés. » Bonne renommée est une seconde vie, et le principe d'une exis- » tence éternelle. »

La Préface continue en ces termes :

« Des hommes versés dans les sciences, et particulièrement » des astrologues du Décan, ont travaillé à cette traduction. On » a conservé les termes indous pour lesquels on ne trouve pas » de termes correspondans dans notre langue. L'ouvrage est di- » visé en trois parties, savoir : une Introduction, des Règles et » une Conclusion. »

Introduction.

Cette partie renferme les définitions des termes de la science du calcul ; le sens de certaines expressions en usage dans l'Arithmétique ; les divisions des poids, des mesures, du tems, etc., avec leur nomenclature. Quelques-unes de ces mesures sont curieuses par leur analogie avec les nôtres, qui en tirent peut-être leur origine. L'auteur prend le grain d'orge pour élément des poids et des mesures. Deux grains d'orge font un soorth ; 8 grains d'orge valent 1 doigt; 24 doigts valent une coudée et 10 coudées forment le bambou ou la verge, mesure qui ne diffère pas beaucoup de la nôtre de même nom.

Le tems est divisé de cette manière : le tems pendant lequel on peut répéter dix fois de suite, ni trop lentement, ni trop vite, une syllabe comme *ta* ou *ka*, se nomme *pran ;* 6 prans font un pul; 60 puls, un ghurry, et 60 ghurrys font un jour et une nuit; ainsi :

60 ghurrys équivalent à nos	24 heures.
1 ghurry vaut donc.......	24 minutes.
1 pul....................	24 secondes.
1 pran...................	4 secondes.
1 ka est prononcé en......	$\frac{4}{10}$ de seconde.

Sur l'écoulement de l'eau dans un cylindre vertical; *par M.* Poisson.

Pour déterminer le mouvement d'un fluide incompressible et pesant qui coule dans un vase de forme quelconque, il faut intégrer le système de ces deux équations (*) :

$$\left.\begin{array}{r} kN\dfrac{du}{dt}-gh+\left(1-\dfrac{k^2}{y'^2}\right).\dfrac{u^2}{2}=0, \\ \dfrac{dh}{dt}+\dfrac{ku}{y'}=0. \end{array}\right\} \quad (1)$$

La pression est supposée la même à la surface supérieure du fluide et à l'orifice horizontal par lequel il s'écoule; t représente le tems, u la vitesse à l'orifice, h la hauteur variable du fluide, y' l'aire de la section du vase correspondante à son niveau, k l'aire de l'orifice, g la pesanteur, et enfin N est une fonction de h donnée par cette intégrale

$$N=\int\frac{dz}{y},$$

dans laquelle y représente l'aire de la section horizontale du vase, faite à la distance quelconque z au-dessous du niveau du fluide, et qui doit être prise depuis $z=0$ jusqu'à $z=h$.

Si l'on élimine dt entre les deux équations (1), et qu'on fasse $u^2=2g\zeta$, il vient

$$\frac{k^2N}{y'}.\frac{d\zeta}{dh}+h-\left(1-\frac{k^2}{y'^2}\right)\zeta=0. \qquad (2)$$

La nouvelle variable ζ exprime la hauteur due à la vitesse u; et comme l'équation (2) est linéaire et du premier ordre, relativement à cette variable, il s'ensuit qu'on peut toujours séparer les variables ζ et h; il s'ensuit donc que la hauteur ζ, la vitesse u, et par suite le tems t, se détermineront par les quadratures en fonctions de h, quelle que soit la forme du vase. Dans le cas d'un cylindre vertical, on a $y=y'=b$, b étant une constante égale à la base du cylindre; on en conclut $N=\frac{h}{b}$, et en faisant, pour abréger, $\frac{b^2}{k^2}=m$, l'équation (2) devient

$$\frac{d\zeta}{dh}+m-(m-1)\frac{\zeta}{h}=0.$$

(*) *Voyez* mon Traité de Mécanique, tom. II, pag. 451.

Intégrant et désignant par c la constante arbitraire, on a

$$\zeta = \frac{m}{m-2}.(h - ch^{m-1}).$$

Substituons cette valeur dans celle de u^2; désignons par H la hauteur initiale du fluide, et déterminons la constante c par la condition que la vitesse u soit nulle à l'origine du mouvement, ou quand $h = H$, nous aurons

$$u^2 = \frac{2gmh}{m-2}.\left[1 - \left(\frac{h}{H}\right)^{m-2}\right]. \qquad (3)$$

Donc à cause de $y' = b = k\sqrt{m}$, la seconde équation (1) donnera

$$dt = -\frac{dh}{\sqrt{2gh}}.\sqrt{\frac{m-2}{1 - \left(\frac{h}{H}\right)^{m-2}}}: \qquad (4)$$

ainsi quand le rapport m sera donné en nombre, il faudra intégrer cette formule pour déterminer le tems de l'écoulement du fluide.

Lorsqu'on a $m = 1$, l'orifice est égal à la base du cylindre; le fluide coule librement, et les équations (1) et (2) se réduisent aux formules ordinaires du mouvement des corps pesans. Il y a encore un autre cas dans lequel on peut intégrer l'équation (4) sous forme finie, c'est celui de $m = 3$. On a alors

$$dt = -\sqrt{\frac{H}{2g}}.\frac{dh}{\sqrt{Hh - h^2}};$$

d'où l'on tire, en intégrant,

$$t = \sqrt{\frac{H}{2g}}.\text{arc}\left(\cos = \frac{2h - H}{H}\right):$$

on n'ajoute pas de constante, parce que l'on compte le tems t de l'origine du mouvement, de sorte qu'on ait à-la-fois $t = 0$ et $h = H$. Pour avoir le tems de l'écoulement entier, il faut faire $h = 0$; en le désignant par T, et par π, le rapport de la circonférence au diamètre, il vient

$$T = \pi\sqrt{\frac{H}{2g}};$$

et l'on voit que ce tems T, pendant lequel le cylindre se vide,

est le même que celui de l'oscillation d'un pendule qui aurait pour longueur la moitié de la hauteur initiale du fluide. Le tems pendant lequel la moitié du fluide s'écoule, répond à $h = \frac{1}{2}H$, et il est égal à la moitié du tems de l'écoulement entier.

Dans le cas de $m = 2$, la formule (4) se présente sous la forme $\frac{0}{0}$; ainsi en développant l'exponentielle $\left(\frac{h}{H}\right)^{m-2}$ suivant les puissances de $m-2$, réduisant et faisant ensuite $m = 2$, on trouve pour sa véritable valeur

$$dt = -\frac{dh}{\sqrt{2gh}}.\left(\log\frac{H}{h}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

On ne peut pas intégrer cette expression sous forme finie, pour une valeur quelconque de h; mais on peut déterminer exactement le tems de l'écoulement entier, ou la valeur de l'intégrale définie prise depuis $h = H$ jusqu'à $h = 0$. En effet, faisant $h = Hx^2$, et désignant ce tems par T, on trouve

$$T = \sqrt{\frac{H}{g}}.\int dx.\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}};$$

l'intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Or, entre ces limites, Euler a trouvé

$$\int dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{\pi};$$

on aura donc

$$T = \sqrt{\frac{\pi H}{g}} = \pi\sqrt{\frac{H}{\pi g}},$$

c'est-à-dire le tems de l'oscillation d'un pendule dont la longueur serait égale à $\frac{H}{\pi}$.

Nous allons montrer maintenant comment on peut transformer l'équation (4) de manière à rendre très-facile pour toutes les valeurs de m, le calcul du tems de l'écoulement entier du fluide.

Supposons d'abord $m > 2$. On fera $h = Hx^2$, $H = g\frac{\theta^2}{2}$, et en appelant T le tems demandé, l'équation (4) donnera

$$T = \theta\sqrt{m-2}.\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2m-4}}},$$

l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$, et θ désignant le tems pendant lequel un corps pesant parcourt la hauteur H. Or les intégrales définies de cette forme se ramènent à d'autres dont M. Legendre a calculé des Tables très-étendues qui vont trouver ici une application utile. Ces transcendantes, qu'il désigne par la lettre Γ, sont (*)

$$\Gamma(a)=\int dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^{a-1},$$

a étant une quantité positive, et l'intégrale étant prise depuis $x=0$ jusqu'à $x=1$. Cela posé, on a, d'après un théorème connu (**),

$$\int x^{p-1}dx\,(1-x^{n})^{\frac{q}{n}-1}=\frac{\Gamma\left(\frac{p}{n}\right).\Gamma\left(\frac{q}{n}\right)}{n.\Gamma\left(\frac{p+q}{n}\right)}, \qquad (5)$$

p, q, n étant des exposans positifs quelconques, et l'intégrale du premier membre ayant aussi pour limite $x=0$ et $x=1$. Donc, en faisant $p=1$, $n=2m-4$, $q=m-2$, on aura, relativement à l'intégrale que nous considérons,

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^{2m-4}}}=\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2m-4}\right).\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{(2m-4).\Gamma\left(\frac{m-1}{2m-4}\right)};$$

substituant dans la valeur de T, et observant que

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)=\int dx\left(\log\frac{1}{x}\right)^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{\pi},$$

il vient
$$T=\frac{\theta\sqrt{\pi}}{2\sqrt{m-2}}.\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2m-4}\right)}{\Gamma\left(\frac{m-1}{2m-4}\right)}.$$

Les Tables de M. Legendre (***) donnent les logarithmes

(*) Ces intégrales reviennent par un simple changement de variable, aux intégrales de la forme $\int e^{-z}z^{a-1}dz$, prises depuis $z=0$ jusqu'à $z=\frac{1}{0}$. Sous cette forme, leurs principales propriétés sont démontrées dans le nouveau bulletin de la Société Philomatique, tom. II, pag. 243.

(**) Exercice du Calcul intégral, deuxième partie, pag. 279.

(***) *Idem*, pag. 302, et quatrième partie, pag. 85.

de la fonction $\Gamma(a)$, pour toutes les valeurs de a, de millième en millième, depuis $a=1$ jusqu'à $a=2$. Il faut donc, pour pouvoir en faire usage, que les quantités $\frac{1}{2m-4}$ et $\frac{m-1}{2m-4}$, tombent entre les limites 1 et 2; or c'est à quoi l'on parviendra toujours en les augmentant ou diminuant d'un certain nombre d'unités, au moyen de la formule

$$\Gamma(a+1)=a.\Gamma(a), \qquad (6)$$

que l'on peut appliquer successivement à a, $a+1$, $a+2$, etc. Ainsi l'on aura

$$\Gamma\left(\frac{1}{2m-4}+1\right)=\frac{1}{2m-4}.\Gamma\left(\frac{1}{2m-4}\right),$$

$$\Gamma\left(\frac{m-1}{2m-4}+1\right)=\frac{m-1}{2m-4}.\Gamma\left(\frac{m-1}{2m-4}\right),$$

ce qui change la valeur précédente de T en

$$T=\frac{\theta\sqrt{\pi}(m-1)}{2\sqrt{m-2}}\cdot\frac{\Gamma\left(\frac{2m-3}{2m-4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3m-5}{2m-4}\right)};$$

et maintenant, pour toutes les valeurs de m plus grandes que 3, les deux nombres compris sous le signe Γ tomberont immédiatement entre les limites 1 et 2.

Soit, pour exemple, $m=4$, ce qui suppose l'orifice moitié de la base du cylindre. On aura

$$\frac{2m-3}{2m-4}=1,25, \qquad \frac{3m-5}{2m-4}=1,75;$$

la Table de M. Legendre donne

$$\log\Gamma(1,25)=9,9573211, \quad \log\Gamma(1,75)=9,9633451;$$

on a aussi
$$\log\sqrt{\frac{\pi}{2}}=0,0980604;$$

avec ces données on conclut

$$T=\theta(1,8541).$$

Maintenant si l'on a $m<2$, on écrira l'équation (4) sous

cette forme :

$$dt = -\frac{\sqrt{2-m}}{\sqrt{2gh}} \cdot \frac{dh}{\sqrt{\left(\frac{H}{h}\right)^{2-m} - 1}}$$

$$= -\frac{\sqrt{2-m}}{\sqrt{2g}} \cdot \frac{h^{\frac{1-m}{2}} dh}{\sqrt{H^{2-m} - h^{2-m}}};$$

faisant ensuite $h = Hx^{\frac{2}{3-m}}$, $H = \frac{g\theta^2}{2}$, et intégrant, on aura pour le tems T de l'écoulement entier,

$$T = \theta \cdot \frac{\sqrt{2-m}}{3-m} \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{\frac{4-2m}{3-m}}}};$$

l'intégrale étant prise depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Or en faisant dans l'équation (5), $p = 1$, $n = \frac{4-2m}{3-m}$, $q = \frac{2-m}{3-m}$, et observant que $\Gamma\left(\frac{q}{n}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, il vient

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^{\frac{4-2m}{3-m}}}} = \frac{(3-m)\sqrt{\pi}}{4-2m} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3-m}{4-2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-2m}{4-2m}\right)};$$

et par conséquent $T = \frac{\theta}{2} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2-m}} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{3-m}{4-2m}\right)}{\Gamma\left(\frac{5-2m}{4-2m}\right)}.$

Prenons pour exemple $m = \frac{25}{16}$, ce qui suppose l'orifice égal aux quatre cinquièmes de la base du cylindre. Nous aurons

$$\frac{3-m}{4-2m} = \frac{23}{14} = 1,643, \qquad \frac{5-2m}{4-2m} = 2,143;$$

mais d'après l'équation (6), on a

$$\Gamma(2,143) = 1,143 \cdot \Gamma(1,143);$$

et je trouve dans les Tables citées

$\log \Gamma(1,643) = 9,9537966$, $\log \Gamma(1,143) = 9,9709922$:

tout calcul fait, on a $T = \theta(1,4907)$,

c'est-à-dire à peu près une fois et demie le tems qu'un corps pesant emploierait à tomber de la hauteur initiale du fluide.

Il est encore bon de connaître la pression qui a lieu, pendant le mouvement, en un point quelconque du cylindre; or en appelant z la distance de ce point au-dessous du niveau variable du fluide, p la pression demandée, Π celle qui a lieu sur le niveau, ρ la densité du fluide, on trouve que la valeur de p se réduit, dans le cas du cylindre vertical, où l'on a $y=y'=b$, à (*)

$$p = \Pi + g\rho z - \frac{k\rho z}{b} \cdot \frac{du}{dt};$$

éliminant dt au moyen de la seconde équation (1), et u au moyen de l'équation (3), cette valeur devient

$$p = \Pi + g\rho z\left(\frac{m-1}{m-2}\right) \cdot \left[1 - \left(\frac{h}{H}\right)^{m-2}\right].$$

Dans l'état d'équilibre, cette pression serait $p = \Pi + g\rho z$; on voit donc que la pression, dans l'état de mouvement, est plus grande ou plus petite, à chaque instant, que la pression hydrostatique, selon que la quantité

$$\frac{m-1}{m-2} \cdot \left[1 - \left(\frac{h}{H}\right)^{m-2}\right]$$

est plus grande ou plus petite que l'unité. Si, par exemple, on suppose $m=3$, cette quantité devient $\frac{2(H-h)}{H}$; elle est donc plus petite que l'unité, dans la première moitié de l'écoulement, où l'on a $h > \frac{1}{2}H$, et plus grande, au contraire, dans la seconde partie. Quand la moitié du fluide est écoulée, on a $h = \frac{1}{2}H$, et à cet instant la pression est la même que si le fluide était en équilibre.

Dans le premier moment du mouvement, h diffère infiniment peu de H, et la valeur de p se réduit à $p = \Pi$; de sorte que la pression due au fluide disparaît entièrement, à l'instant où le fluide commence à couler. Ce résultat est subordonné à l'hypothèse du parallélisme des tranches, sur laquelle est fondée l'expression générale de la quantité p : il tient à ce que, dans cette hypothèse, le vase étant supposé cylindrique vertical et percé d'un orifice horizontal, les tranches fluides prennent au premier instant des vitesses infiniment petites, qui sont les mêmes que si ces tranches étaient libres, ainsi qu'il est facile de s'en assurer.

(*) Traité de Mécanique, tom. II, pag. 450.

Note sur une difficulté relative à l'intégration des équations aux différences partielles du premier ordre; par M. Poisson (*).

Lorsqu'on a une équation aux différences partielles du premier ordre, à trois variables et non linéaire par rapport aux différences, on fait dépendre son intégration de celle d'une autre équation linéaire et à quatre variables. L'intégrale de celle-ci renferme une fonction arbitraire de deux quantités, ce qui semblerait devoir en introduire une semblable dans l'intégrale de la proposée, laquelle ne doit cependant contenir qu'une fonction d'une seule quantité. Dans les leçons sur le calcul des fonctions (**) M. Lagrange dit que cette difficulté l'a long-tems tourmenté, et qu'il est enfin parvenu à la résoudre, en employant un changement de variables au moyen duquel il fait voir que la fonction double se réduit toujours à une fonction simple; mais cette méthode a l'inconvénient, ainsi que M. Lacroix l'a remarqué dans la seconde édition de son Calcul intégral (***), de compliquer la forme générale de l'intégrale, qui se trouve alors représentée par le système de trois équations, tandis que dans chaque cas elle doit être exprimée par deux équations seulement. En suivant une marche différente, on parvient, d'une manière qui me semble plus directe, à lever complètement la difficulté dont nous parlons, ou plutôt à montrer qu'elle n'est qu'apparente, et l'on a en même tems l'avantage de conserver à l'intégrale la forme simple qu'elle doit avoir : c'est ce que je me propose de faire voir dans cette note.

Représentons l'équation proposée par

$$f(x, y, z, p, q) = 0; \qquad (1)$$

p et q désignant les différences partielles de z par rapport à x et à y. On tirera de là la valeur de p pour la substituer dans

$$dz = pdx + qdy; \qquad (2)$$

(*) Cette note a été publiée dans le Bulletin de la Société Philomatique, en novembre 1815, pag. 183. Nous la rapportons ici, pour servir d'éclaircissement à la méthode donnée par M. Monge, pour l'intégration des équations aux différences partielles des surfaces courbes. H. C.

(**) Journal de l'École Polytechnique, douzième cahier, pag. 311.

(***) Tome II, pag. 555.

et l'on disposera de la quantité q, qui reste indéterminée, pour rendre intégrable cette valeur de dz. Or on sait que q devra alors être donnée par l'équation

$$\frac{dp}{dy}+\frac{dp}{dz}.q-\frac{dq}{dx}-\frac{dq}{dz}.p=0, \tag{3}$$

dans laquelle il faudra aussi substituer la valeur de p, et qui sera, en x, y, z et q, l'équation auxiliaire dont nous venons de parler.

L'intégrale de cette équation (3) dépend de trois équations différentielles ordinaires que nous n'aurons pas besoin d'écrire; nous représenterons leurs intégrales complètes par

$$a=f_1(x,y,z,q),\ b=f_2(x,y,z,q),\ c=f_3(x,y,z,q); \tag{4}$$

a, b, c étant les constantes arbitraires : l'intégrale générale de l'équation (3) sera

$$a=\Pi(b,c), \tag{5}$$

Π désignant une fonction arbitraire.

Supposons l'une des équations (4), la première, par exemple, résolue par rapport à q; soit

$$q=\psi(x,y,z,a) \tag{6}$$

la valeur qu'on en tire; substituons-la dans les deux autres équations, ce qui donne des résultats de cette forme :

$$b=\psi_1(x,y,z,a),\quad c=\psi_2(x,y,z,a);$$

substituons ensuite ces valeurs de b et c dans l'équation (5), nous aurons

$$a=\Pi[\psi_1(x,y,z,a),\ \psi_2(x,y,z,a)]; \tag{7}$$

et nous pouvons dire maintenant que la valeur la plus générale de q qui satisfasse à l'équation (3), et qui ait, par conséquent, la propriété de rendre intégrable l'équation (2), est exprimée par l'équation (6), en y considérant a comme une quantité donnée par l'équation (7).

Cela posé, la valeur de a sera, ou une quantité variable dépendante de la forme qu'on donnera à la fonction Π, ou une constante arbitraire quand on prendra pour cette fonction une semblable constante. Supposons d'abord que le second cas ait lieu; concevons qu'on ait intégré l'équation (2); après y avoir subs-

tué à la place de p et q, leurs valeurs tirées des équations (1) et (6), et désignons son intégrale par

$$F(x, y, z, a) = k, \quad (8)$$

k étant la constante arbitraire. Si l'on veut présentement avoir l'intégrale de la même équation (2), dans l'hypothèse de a variable, il est évident qu'on peut encore supposer qu'elle soit représentée par l'équation (8), pourvu qu'on y regarde k comme une nouvelle variable, et qu'on détermine convenablement sa valeur, c'est-à-dire, de manière que la différentielle de l'équation (8) reste la même quand a et k sont constantes, et lorsque a et k sont devenues variables. Il faudra donc qu'on ait

$$\frac{d.F(x, y, z, a)}{da} da = dk; \quad (9)$$

or cette équation ne saurait subsister, à moins que le coefficient de da, dans le premier membre, ne soit une fonction de a et k sans x, y, z; ainsi Π_1 désignant une fonction arbitraire, il faudra que l'équation qui sert à déterminer a revienne à celle-ci.

$$\frac{d.F(x, y, z, a)}{da} = \Pi_1(a, k), \quad (7')$$

laquelle, par conséquent, devra être identique avec l'équation (7). Cela étant, on aura $dk = \Pi_1(a, k)\, da$; et de cette équation on tirera $k = \varphi a$, ce qui change les équations (8) et (9) en celles-ci :

$$F(x, y, z, a) = \varphi a, \quad \frac{d.F(x, y, z, a)}{da} = \frac{d.\varphi a}{da}, \quad (10)$$

qui représenteront l'intégrale générale de l'équation (2). Quant à l'équation (7), elle est maintenant superflue, car elle peut être remplacée par l'équation (7'), qui devient

$$\frac{d.\varphi a}{da} = \Pi_1(a, k) = \Pi_1(a, \varphi a),$$

et qui ne fait qu'établir une relation entre les deux fonctions arbitraires désignées par φ et Π_1, dont la seconde n'entre pas dans les équations (10).

Nous pouvons conclure de là :

1°. Que l'intégrale générale de l'équation (2), ne contient qu'une fonction arbitraire d'une seule quantité, quoique la valeur de q soit donnée par une équation renfermant une fonction de deux quantités;

2°. Que, pour l'obtenir, il suffit de connaître une intégrale par-

ticulière de l'équation (3), renfermant une simple constante arbitraire, c'est-à-dire une des trois équations (4) ; ce qui coïncide avec la méthode ordinaire.

On vérifiera sans peine tout ce qui précède, sur l'équation $z - pq = 0$, que M. Lagrange a prise pour exemple, et particulièrement l'identité des équations (7) et (7'), que nous avons démontrée d'une manière générale.

En effet, les trois intégrales particulières dont dépend son intégrale complète, ou les équations (4), sont, dans ce cas (*),

$$a = q - x, \quad b = \frac{z}{q^2}, \quad c = y - \frac{z}{q};$$

tirant la valeur de q de la première et la substituant dans les deux autres, il vient

$$b = \frac{z}{(a+x)^2}, \quad c = y - \frac{z}{a+x};$$

par conséquent l'équation (7) sera

$$a = \Pi\left(\frac{z}{(a+x)^2}, \quad y - \frac{z}{a+x}\right). \quad (7)$$

En mettant pour p et q leurs valeurs, savoir :

$$q = a + x, \quad p = \frac{z}{q} = \frac{z}{a+x},$$

dans $dz = pdx + qdy$, on a

$$dz = \frac{zdx}{a+x} + (a+x)dy: \qquad (a)$$

c'est donc cette équation qu'il faut intégrer, en y regardant a comme déterminée par l'équation (7). J'intègre d'abord dans l'hypothèse de a constante, ce qui donne

$$z = (a+x)(y+k), \quad \text{ou} \quad \frac{z}{a+x} - y = k,$$

k étant la constante arbitraire. Pour étendre cette intégrale au cas de a variable, il faut y joindre sa différentielle par rapport à a et k, ainsi qu'on l'a dit plus haut ; on a alors

$$-\frac{zda}{(a+x)^2} = dk;$$

(*) Calcul intégral de M. Lacroix, pag. 556.

mais l'équation (7) se réduit à

$$a = \Pi\left(\frac{z}{(a+x)^2}, -k\right),$$

et elle montre que la quantité $\frac{z}{(a+x)^2}$ est une fonction de a et k; donc, en vertu de l'équation précédente, k ne peut être qu'une fonction de a. Soit, par conséquent, $k = \varphi a$; l'intégrale générale de l'équation (a) sera exprimée par le système de ces deux équations :

$$\frac{z}{a+x} - y = \varphi a, \qquad -\frac{z}{(a+x)^2} = \frac{d.\varphi a}{da},$$

et l'équation (7) deviendra

$$a = \Pi\left(-\frac{d.\varphi a}{da}, -\varphi a\right);$$

de sorte qu'elle ne fera qu'établir une relation entre la fonction φ et la fonction Π, ce qu'il s'agissait de vérifier.

Sans entrer dans de plus grands détails, nous nous contenterons d'observer que le même exemple peut servir à deux autres vérifications semblables, en partant successivement de la seconde et de la troisième équation (4), c'est-à-dire en prenant successivement les constantes b et c et les équations qui les contiennent, à la place de la constante a et de la première équation (4).

RAPPORT *fait à l'Institut, le* 11 *décembre* 1815, *par M.* Legendre, *sur un Mémoire de* A. L. Cauchy, *intitulé :* Démonstration générale du théorème de Fermat, sur les nombres polygones.

Quoique la théorie des nombres ait fait de grands progrès dans ces derniers tems, et qu'elle soit beaucoup plus avancée maintenant qu'elle ne l'était du tems de *Fermat*; cependant le beau théorème sur les nombres polygones, dû à ce savant célèbre, n'a encore été démontré que dans ses deux premières parties, qui sont relatives aux nombres triangulaires et aux carrés ; de sorte que tout ce qui regarde les autres polygones à l'infini, reste encore à démontrer.

Il y a lieu de s'étonner que les géomètres, qui ont su vaincre tant d'autres difficultés, aient été arrêtés jusqu'ici devant une

mule $Ak+Bs+r$ représentera tous les nombres entiers compris entre la plus petite et la plus grande valeur dont cette formule est susceptible, à raison des limites de s; d'où il suit que tous ces nombres peuvent être décomposés en n polygones dont $n-4$ seront égaux à zéro ou à l'unité.

La même formule, en augmentant k de deux unités, et prenant s dans les limites qui conviennent à cette nouvelle valeur de k, fournira la même conclusion, c'est-à-dire, qu'on aura une seconde suite de nombres entiers plus grands que ceux de la première suite, lesquels seront également décomposables en n polygones de l'ordre n.

On prouve d'ailleurs que ces deux suites ne laissent point de lacune entr'elles, mais plutôt que la fin de l'une se confond avec le commencement de l'autre, de sorte qu'étant réunies elles offrent la série complète de tous les nombres entiers compris depuis le plus petit terme de la première suite jusqu'au plus grand terme de la seconde.

Il est inutile d'en dire davantage, et on voit qu'en prenant pour k des nombres impairs de plus en plus grands, la formule $Ak+Bs+r$ représentera successivement tous les nombres entiers depuis celui qui répond aux moindres valeurs de k et de s jusqu'à l'infini. Par conséquent tous ces nombres sont décomposables en n nombres polygonaux dont $n-4$ sont égaux à zéro ou à l'unité.

Il ne reste donc à examiner que les nombres compris dans la même formule $Ak+Bs+r$, lorsque k est inférieur à 121. Or cet examen est sans difficulté, puisqu'il n'y a qu'un nombre limité de valeurs de k à considérer; et d'ailleurs l'auteur avait préparé d'avance la solution de ces cas particuliers, par quelques propositions subsidiaires. Il est donc bientôt conduit à la conclusion générale, qui est que tout nombre entier peut être représenté par la formule $Ak+Bs+r$ avec les conditions prescrites, et qu'ainsi tout nombre entier peut être décomposé en n polygones de l'ordre n, dont $n-4$ sont égaux à zéro ou à l'unité.

La supposition qu'avait faite M. Cauchy pour simplifier la solution du problème, se trouve ainsi justifiée par la conclusion à laquelle il parvient. Non-seulement donc il démontre le théorème de *Fermat* dans toute sa généralité, pour tous les polygones au-delà des carrés; mais il substitue au théorème de *Fermat* un théorème beaucoup plus précis et plus intéressant, puisqu'il prouve que sur les n nombres polygonaux qui entrent dans la composition d'un nombre donné quelconque, il y en a toujours $n-4$ égaux à zéro ou à l'unité.

Il résulte en même tems de l'analyse de M. Cauchy, que

la décomposition effective d'un nombre donné en n polygones de l'ordre n peut toujours s'opérer *à priori*, en supposant seulement qu'on sache décomposer en trois carrés les nombres qui sont susceptibles de cette décomposition.

Nous concluons de ce qui précède que le Mémoire de M. Cauchy offre une nouvelle preuve du talent et de la sagacité que l'auteur a montrés dans d'autres recherches également utiles au progrès de l'Analyse et de la Géométrie. Nous pensons en conséquence que ce Mémoire est digne des éloges de la Classe, et d'être imprimé dans le Recueil des Savans étrangers.

GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE.

Théorème. « Lorsque deux surfaces quelconques du second degré » sont circonscrites à une troisième surface du même degré, elles » se coupent toujours dans le système de deux courbes planes » du second degré. » (*Voyez* la *Correspondance*, tome II, page 321 et la page 339 de ce cahier).

Démonstration de cette proposition, dans le cas particulier où les trois surfaces du second degré ont pour diamètres conjugués les parallèles aux trois droites D, D', D'', dont deux D, D' sont dirigées du centre de la surface inscrite aux centres des deux surfaces circonscrites, et la troisième D'', est l'intersection des plans des deux courbes de contact.

Supposons que les trois surfaces soient rapportées à trois axes parallèles aux droites D, D', D'', et que le centre de la surface inscrite soit l'origine des coordonnées, l'équation de cette première surface sera

$$(A) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$

dans laquelle les quantités A, B, C sont trois constantes données à volonté; et en nommant a, b les distances de l'origine aux centres des deux surfaces qui circonscrivent la première, les équations de ces deux surfaces pourront d'abord être mises sous les formes suivantes :

$$(B) \qquad A'(x-a)^2 + B'y^2 + C'z^2 = 1,$$
$$(C) \qquad A''x^2 + B''(y-b)^2 + C''z^2 = 1,$$

puisque le centre de l'une est sur la droite des x, et que le centre de l'autre est sur la droite des y. Les six quantités A', B', C', A'', B'', C'', que renferment ces équations, sont encore

des constantes ; mais elles ne peuvent pas être prises arbitrairement, et il faut les déterminer de manière que les deux dernières surfaces soient circonscrites à la première.

Or lorsque deux surfaces sont circonscrites, toutes les sections faites dans les deux surfaces, par un plan parallèle à celui de leur courbe de contact, sont semblables entr'elles et semblablement placées ; donc les dimensions homologues de ces sections sont entr'elles dans le même rapport. Ainsi en nommant e ce rapport pour le cas du premier contact, on aura

$$B' = e^2B,$$
$$C' = e^2C;$$

et nommant e' le rapport pour le cas du second contact, on aura

$$A'' = e'^2A,$$
$$C'' = e'^2C,$$

équations dans lesquelles les rapports e, e' sont élevés au carré, parce que les constantes A, B, C, B', C', A'', B'' sont toutes de deux dimensions.

Si l'on substitue pour B', C', A'', C'' ces valeurs dans (B), (C), ces équations deviendront

$$A'(x-a)^2 + e^2(By^2+Cz^2) = 1,$$
$$B''(y-b)^2 + e'^2(Ax^2+Cz^2) = 1,$$

ou

$$(D) \qquad A'(x-a)^2 - Ae^2x^2 + e^2(Ax^2+By^2+Cz^2) = 1,$$
$$(E) \qquad B''(y-b)^2 - Be'^2y^2 + e'^2(Ax^2+By^2+Cz^2) = 1.$$

Actuellement, si l'on cherche l'intersection de la première surface, dont l'équation est (A), avec chacune des deux surfaces circonscrites, dont les équations sont (D) et (E), en éliminant la quantité $Ax^2+By^2+Cz^2$, qui est commune à ces trois équations, on aura pour la première intersection,

$$(F) \qquad A'(x-a)^2 - Ae^2x^2 + e^2 - 1 = 0,$$

et pour la seconde

$$(G) \qquad B''(y-b)^2 - Be'^2y^2 + e'^2 - 1 = 0,$$

équations du second degré algébriques, l'une en x, l'autre en y, dont les résolutions donnent

$$(A' - Ae^2)x = A'a + \sqrt{Ae^4 + e^2(AA'a^2 - A - A') + A'},$$
$$(D'' - Be'^2)y = B''b + \sqrt{Be'^4 + e'^2(BB''b^2 - B - B'') + B''},$$

et prouvent que la première surface, dont l'équation est (A), coupe les deux autres, considérées dans l'état où les représentent les équations (D) et (E), chacune dans le système de deux plans parallèles entr'eux, et au plan de leur courbe de contact respective.

Mais, par l'hypothèse, les deux dernières surfaces sont circonscrites à la première; donc, pour chacune d'elles, les deux plans de son intersection avec la première se confondent; par conséquent les deux radicaux des deux dernières équations sont l'un et l'autre égaux à zéro, ce qui détermine les valeurs de e, e', et les équations (F) et (G) sont chacune un carré parfait, dont les racines sont

$$(A'-Ae^2)x-A'a=0 \quad \text{pour l'une,}$$

et $$(B''-Be'^2)y-B''b=0 \quad \text{pour l'autre.}$$

Tout étant ainsi préparé, considérons actuellement l'intersection des deux surfaces circonscrites dont les équations sont (D), (E). On aura l'équation de sa projection sur le plan des x, y, en éliminant z entre les équations de ces deux surfaces, ou bien en éliminant la parenthèse commune $(Ax^2+By^2+Cz^2)$, qui seule contient z, ce qui donne

$$e'^2\left\{A'(x-a)^2-Ae^2x^2-1\right\}-e^2\left\{B''(y-b)^2-Be'^2y^2-1\right\}=0,$$

ou ajoutant dans les deux parenthèses, qui sont de signes contraires, la même quantité $e^2e'^2$,

$$(H)\qquad \begin{aligned} &e'^2\left\{A'(x-a)^2-Ae^2x^2+e^2-1\right\}\\ &-e^2\left\{B''(y-b)^2-Be'^2y^2+e'^2-1\right\}=0. \end{aligned}$$

Or ces parenthèses ne sont autre chose que les premiers membres des équations (F), (G), qui, comme nous venons de le voir, sont deux carrés parfaits; donc l'équation (H) de la projection sur le plan des x, y de l'intersection des deux surfaces circonscrites est

$$e'^2\left\{(A'-Ae^2)x-A'a\right\}^2-e^2\left\{(B''-Be'^2)y-B''b\right\}^2=0,$$

dont le premier membre est la différence de deux carrés, et équivaut par conséquent au système des deux équations linéaires

$$e'\left\{(A'-Ae^2)x-A'a\right\}+e\left\{(B''-Be'^2)y-B''b\right\}=0,$$
$$e'\left\{(A'-Ae^2)x-A'a\right\}-e\left\{(B''-Be'^2)y-B''b\right\}=0.$$

Donc l'intersection elle-même est comprise dans le système des

deux plans auxquels appartiennent les deux équations précédentes, et sont par conséquent des courbes du second degré.

On connaissait depuis très-long-tems quelques cas particuliers de cette proposition générale. On savait, par exemple, que dans les voûtes d'arêtes ou en arcs de cloître, droites ou biaises, horizontales ou rampantes, les arêtes saillantes ou rentrantes de ces voûtes sont toujours des ellipses planes, parce qu'elles sont les intersections de surfaces cylindriques circonscrites à la surface d'un même ellipsoïde. Il en est de même des voûtes d'arêtes en arcs de cloître multiples, qui couvrent ordinairement les *ronds-points* de nos vieilles églises gothiques, ou les salons de quelques-unes de nos abbatiales; mais le théorème que nous venons de démontrer est d'une généralité beaucoup plus grande. Nous observerons même à cet égard que, comme dans la démonstration nous n'avons pas fait attention aux signes des neuf coefficiens A, B, C, A', B', C', A'', B'', C'' qui entrent dans les trois équations (A), (B), (C). La vérité du théorème est indépendante du nombre de sommets réels dont chacune des trois surfaces de second degré que l'on considère est susceptible; ainsi chacune d'elles peut-être indifféremment un ellipsoïde, ou un hyperboloïde à une nappe, ou un hyperboloïde à deux nappes, sans que le théorème cesse d'avoir lieu. Enfin il aurait encore lieu quand même les trois surfaces auraient leurs centres à l'infini. (*Article de M. Monge.*)

Propriétés des diamètres de l'ellipsoïde; par M. Chasles, *ancien élève de l'École Polytechnique.*

Lemme.

(1) « Si entre les neuf quantités α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ''
» on a les six équations

$$(a)\ldots\ \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1,\quad \alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2=1,\quad \alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2=1,$$
$$(b)\ldots\ \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,\quad \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''=0,\quad \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0,$$

» l'on aura les quinze suivantes :

$$(c)\ldots\ \alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2=1,\quad \beta^2+\beta'^2+\beta''^2=1,\quad \gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2=1,$$
$$(d)\ldots\ \alpha\beta+\alpha'\beta'+\alpha''\beta''=0,\quad \alpha\gamma+\alpha'\gamma'+\alpha''\gamma''=0,\quad \beta\gamma+\beta'\gamma'+\beta''\gamma''=0,$$

$$(e)\ldots\ \begin{cases} \alpha=\beta'\gamma''-\beta''\gamma', & \alpha'=\beta''\gamma-\beta\gamma'', & \alpha''=\beta\gamma'-\beta'\gamma, \\ \beta=\alpha''\gamma'-\alpha'\gamma'', & \beta'=\alpha\gamma''-\alpha''\gamma, & \beta''=\alpha'\gamma-\alpha\gamma', \\ \gamma=\alpha'\beta''-\alpha''\beta', & \gamma'=\alpha''\beta-\alpha\beta'', & \gamma''=\alpha\beta'-\alpha'\beta. \end{cases}$$ »

En effet, α, β, γ; α', β', γ'; α'', β'', γ'' peuvent représenter

les cosinus des angles que trois droites rectangulaires R, R', R'' font avec trois axes x, y, z également rectangulaires ; car les six équations proposées exprimeront que la somme des carrés des cosinus des angles qu'une des droites R, R', R'' fait avec les trois axes, est égale à l'unité, et que les angles de ces droites sont droits.

D'après cela, les six équations (c) et (d) auront lieu ; car elles indiqueront que la somme des carrés des cosinus des angles qu'un des axes x, y, z fait avec les trois droites R, R', R'' est égale à l'unité, et que les angles de ces axes sont droits.

Enfin pour vérifier une des neuf équations (e), la première, par exemple, on observera que le cosinus de l'angle que le plan des deux droites R', R'' fait avec le plan des zy est

$$\frac{\beta'\gamma''-\beta''\gamma'}{\sqrt{(\beta'\gamma''-\beta''\gamma')^2+(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')^2+(\alpha'\beta''-\alpha''\beta')^2}}$$
$$=\frac{\beta'\gamma''-\beta''\gamma'}{\sqrt{(\alpha'^2+\beta'^2+\gamma'^2)(\alpha''^2+\beta''^2+\gamma''^2)-(\alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')^2}};$$

Or le dénominateur se réduit à l'unité, en vertu des deuxième, troisième et sixième équations, on a donc simplement $\beta'\gamma''-\beta''\gamma'$; mais ce cosinus est le même que celui que la droite R fait avec l'axe des x, lequel est α; l'on a donc

$$\alpha=\beta'\gamma''-\gamma'\beta''.$$

On prouverait semblablement que les huit dernières équations sont vraies.

(2) Soit l'ellipsoïde (*)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

rapporté à ses trois axes rectangulaires.

Appelons α, β, γ les cosinus des angles qu'un diamètre R fait avec ces axes, on aura

$$\frac{1}{R^2}=\frac{1}{a^2}\alpha^2+\frac{1}{b^2}\beta^2+\frac{1}{c^2}\gamma^2.$$

Les coordonnées $x=a\alpha$, $y=b\beta$, $z=c\gamma$ peuvent représenter l'extrémité d'un diamètre r de l'ellipsoïde, car elles satisfont à son équation ; la longueur de ce diamètre a pour carré

$$r^2=a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2.$$

Les coordonnées de l'extrémité de r indiquent la construction sui-

(*) *Voyez* Le traité des surfaces du second degré, par M. Hachette, p. 169.

vante pour obtenir ce diamètre, quand on connaît la direction du premier R.

On décrira trois sphères concentriques à la surface et qui aient pour rayons a, b, c; par les points où elles couperont le diamètre R on mènera trois plans parallèles aux plans zy, zx, xy respectivement; leur point d'intersection sera l'extrémité du diamètre r.

Des diamètres R', R'',... on déduira semblablement les diamètres r', r'',..., et l'on aura

$$\frac{1}{R'^2}=\frac{1}{a^2}\alpha'^2+\frac{1}{b^2}\beta'^2+\frac{1}{c^2}\gamma'^2,\quad r'^2=a^2\alpha'^2+b^2\beta'^2+c^2\gamma'^2,$$

$$\frac{1}{R''^2}=\frac{1}{a^2}\alpha''^2+\frac{1}{b^2}\beta''^2+\frac{1}{c^2}\gamma''^2,\quad r''^2=a^2\alpha''^2+b^2\beta''^2+c^2\gamma''^2,$$

....

(3) Si à l'extrémité du diamètre r on mène un plan tangent, et que du centre de la surface on lui abaisse une perpendiculaire, elle sera égale au diamètre R; car ce plan a pour équation

$$\frac{1}{a}\alpha x+\frac{1}{b}\beta y+\frac{1}{c}\gamma z=1,$$

et la longueur de la perpendiculaire est

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}\alpha^2+\frac{1}{b^2}\beta^2+\frac{1}{c^2}\gamma^2}}=R.$$

(4) Si les trois diamètres R, R', R'', sont rectangulaires, les trois r, r', r'' seront des diamètres conjugués.

En effet, pour rapporter la surface à des coordonnées X, Y, Z parallèles à r, r', r'' respectivement, on fera :

$$x=\frac{a\alpha}{r}X+\frac{a\alpha'}{r'}Y+\frac{a\alpha''}{r''}Z,$$

$$y=\frac{b\beta}{r}X+\frac{b\beta'}{r'}Y+\frac{b\beta''}{r''}Z,$$

$$z=\frac{c\gamma}{r}X+\frac{c\gamma'}{r'}Y+\frac{c\gamma''}{r''}Z.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation de l'ellipsoïde et indiquant que les termes en XY, XZ, YZ doivent disparaître pour que r, r', r'' soient conjugués, on aura les trois conditions

$$\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0,\quad \alpha\alpha''+\beta\beta''+\gamma\gamma''=0,\quad \alpha'\alpha''+\beta'\beta''+\gamma'\gamma''=0,$$

lesquelles auront toujours lieu quand R, R', R'' seront rectangulaires.

Ainsi quand r, r', r'' seront conjugués, les vingt-une équations du lemme (1) auront lieu.

(5) « La somme des carrés des valeurs inverses de trois diamètres rectangulaires est une quantité constante. »

En effet,

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}+\frac{1}{R''^2}=\frac{1}{a^2}(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2)+\frac{1}{b^2}(\beta^2+\beta'^2+\beta''^2)$$
$$+\frac{1}{c^2}(\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2),$$

ou

$$\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}+\frac{1}{R''^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}. \quad (c)$$

(6) Les plans tangens aux extrémités des diamètres R, R', R'' ont pour équations

$$\frac{\alpha}{a^2}x+\frac{\beta}{b^2}y+\frac{\gamma}{c^2}z=\frac{1}{R},$$
$$\frac{\alpha'}{a^2}x+\frac{\beta'}{b^2}y+\frac{\gamma'}{c^2}z=\frac{1}{R'},$$
$$\frac{\alpha''}{a^2}x+\frac{\beta''}{b^2}y+\frac{\gamma''}{c^2}z=\frac{1}{R''}.$$

Elevant au carré et ajoutant membre à membre ces trois équations, on aura, en supposant R, R', R'' rectangulaires,

$$\frac{1}{a^4}x^2+\frac{1}{b^4}y^2+\frac{1}{c^4}z^2=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2},$$

ce qui fait voir que :

Le point d'intersection de trois plans tangens à un ellipsoïde aux extrémités de trois diamètres rectangulaires, se meut sur une surface du second degré concentrique à la proposée.

(7) « Le plan qui passe par les extrémités de trois diamètres rectangulaires roule sur une sphère. »

En effet, en ayant égard aux équations (e) du lemme, on trouve pour équation de ce plan

$$(RR'\alpha''+RR''\alpha'+R'R''\alpha)x+(RR'\beta''+RR''\beta'+R'R''\beta)y$$
$$+(RR'\gamma''+RR''\gamma'+R'R''\gamma)z=RR'R''.$$

La longueur de la perpendiculaire abaissée sur ce plan, du

centre de la surface, se réduit, en vertu des équations (a) et (b), à

$$\frac{RR'R''}{\sqrt{R^2R'^2+R^2R''^2+R'^2R''^2}}=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}+\frac{1}{R''^2}}}$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}. \quad (5)$$

Cette quantité est constante; donc le plan roule sur la sphère qui l'a pour rayon et dont le centre est à l'origine.

(8) « La somme des carrés de trois diamètres conjugués est » constante. »

Car $r^2+r'^2+r''^2=a^2(\alpha^2+\alpha'^2+\alpha''^2)+b^2(6^2+6'^2+6''^2)$
$+c^2(\gamma^2+\gamma'^2+\gamma''^2)=a^2+b^2+c^2. \quad (c)$

(9) « La somme des carrés des projections de trois diamètres » conjugués sur une droite fixe; est constante. » (*)

En effet, en appelant δ, ε; φ les cosinus des angles qu'une droite D fait avec les trois axes des coordonnées, on aura :

$$r\cos\widehat{r,D}=a\alpha\delta+b6\varepsilon+c\gamma\varphi,$$
$$r'\cos\widehat{r',D}=a\alpha'\delta+b6'\varepsilon+c\gamma'\varphi,$$
$$r''\cos\widehat{r'',D}=a\alpha''\delta+b6''\varepsilon+c\gamma''\varphi;$$

d'où

$$r^2\cos^2\widehat{r,D}+r'^2\cos^2\widehat{r',D}+r''^2\cos^2\widehat{r'',D}=a^2\delta^2+b^2\varepsilon^2+c^2\varphi^2, \quad (c \text{ et } d)$$

$r\cos\widehat{r,D}$, $r'\cos\widehat{r',D}$, $r''\cos\widehat{r'',D}$ sont les projections des diamètres r, r', r'' sur la droite D; le second membre est une quantité constante; donc, etc.

Il suit de ce théorème et du précédent, que :

La somme des carrés des perpendiculaires abaissées des extrémités de trois diamètres conjugués sur un diamètre fixe, est une quantité constante.

(10) « La somme des carrés des perpendiculaires abaissées » des extrémités de trois diamètres conjugués sur un plan fixe » passant par le centre de la surface, est constante. »

En effet, les perpendiculaires abaissées des extrémités des trois diamètres r, r', r'' sur le plan $Ax+By+Cz=0$, ont pour longueurs

$$\frac{Aa\alpha+Bb6+Cc\gamma}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \frac{Aa\alpha'+Bb6'+Cc\gamma'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\ \frac{Aa\alpha''+Bb6''+Cc\gamma''}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

(*) Proposition démontrée page 258 du Traité des surfaces du second degré cité.

la somme des carrés de ces trois quantités est

$$\frac{A^2a^2+B^2b^2+C^2c^2}{A^2+B^2+C^2}. \quad (c \text{ et } d)$$

Cette quantité est constante; donc, etc.

Il suit de là et du théorème (8), que :

La somme des carrés des projections de trois diamètres conjugués sur un plan fixe, est une quantité constante.

(11) Le cosinus de l'angle des deux diamètres r, r' est

$$\cos \widehat{r,r'} = \frac{a^2\alpha\alpha' + b^2\mathcal{C}\mathcal{C}' + c^2\gamma\gamma'}{rr'},$$

d'où

$$r^2r'^2\sin^2\widehat{r,r'} = r^2r'^2 - (a^2\alpha\alpha' + b^2\mathcal{C}\mathcal{C}' + c^2\gamma\gamma')^2$$
$$= (a^2\alpha^2+b^2\mathcal{C}^2+c^2\gamma^2)(a^2\alpha'^2+b^2\mathcal{C}'^2+c^2\gamma'^2) - (a^2\alpha\alpha'+b^2\mathcal{C}\mathcal{C}'+c^2\gamma\gamma')^2$$
$$= a^2b^2(\alpha\mathcal{C}'-\alpha'\mathcal{C})^2 + a^2c^2(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2 + b^2c^2(\mathcal{C}\gamma'-\mathcal{C}'\gamma)^2,$$

ou, en vertu des équations (e),

$$r^2r'^2\sin^2\widehat{r,r'} = a^2b^2\gamma''^2 + a^2c^2\mathcal{C}''^2 + c^2b^2\alpha''^2$$
$$= a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^2}\alpha''^2 + \frac{1}{b^2}\mathcal{C}''^2 + \frac{1}{c^2}\gamma''^2\right) = \frac{a^2b^2c^2}{R''^2}; \quad (2)$$

d'où $$rr'\sin\widehat{r,r'} = \frac{abc}{R''}, \qquad rr'\sin\widehat{r,r'}.R'' = abc.$$

Or $rr'\sin\widehat{r,r'}$ est l'aire du parallélogramme construit sur les deux diamètres r, r'; R'' est égal à la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent à l'extrémité du diamètre r'' (3); donc $rr'\sin\widehat{r,r'}.R''$ représente le volume du parallélepipède construit sur r, r', r''; donc :

Le volume du parallélepipède construit sur trois diamètres conjugués est constant (*).

(12) L'on a les trois équations

$$rr'\sin\widehat{r,r'} = \frac{abc}{R''}, \quad rr''\sin\widehat{r,r''} = \frac{abc}{R'}, \quad r'r''\sin\widehat{r',r''} = \frac{abc}{R}. \quad (11)$$

La somme des carrés de ces trois quantités est

$$a^2b^2c^2\left(\frac{1}{R^2}+\frac{1}{R'^2}+\frac{1}{R''^2}\right) = a^2b^2c^2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right), \quad (5)$$

ou

$$a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2;$$

(*) *Voyez* pages 257 et 258 du Traité cité.

Donc :

La somme des carrés des faces du parallélepipède construit sur trois diamètres conjugués est une quantite constante.

(13) Ayant construit un parallèlepipède sur trois diamètres conjugués, la somme des carrés des projections des faces de ce parallélepipède sur un plan fixe, est une quantité constante.

En effet, le plan passant par les deux diamètres r, r' a pour équation

$$ab(\alpha\beta' - \alpha'\beta)z + ac(\gamma\alpha' - \alpha\gamma')y + bc(\beta\gamma' - \gamma\beta')x = 0,$$

ou

$$ab\gamma''z + ac\beta''y + bc\alpha''x = 0. \qquad (e)$$

Le cosinus de l'angle qu'il fait avec le plan

$$Lx + My + Nz = k$$

est, en observant que $rr'\sin\widehat{r,r'} = \sqrt{a^2b^2\gamma''^2 + a^2c^2\beta''^2 + b^2c^2\alpha''^2}$ (11),

$$\frac{Lbc\alpha'' + Mac\beta'' + Nab\gamma''}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}\; rr'\sin\widehat{r,r'}};$$

l'aire de la projection du parallélogramme $rr'\sin\widehat{r,r'}$ sur le plan que nous considérons, est donc

$$\frac{Lbc\alpha'' + Mac\beta'' + Nab\gamma''}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

Les aires des projections des parallélogrammes $rr''\sin\widehat{r,r''}$, $r'r''\sin\widehat{r',r''}$, sur le même plan, sont semblablement

$$\frac{Lbc\alpha' + Mac\beta' + Nab\gamma'}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}, \qquad \frac{Lbc\alpha + Mac\beta + Nab\gamma}{\sqrt{L^2 + M^2 + N^2}}.$$

La somme des carrés de ces trois projections est égale à

$$\frac{L^2b^2c^2 + M^2a^2c^2 + N^2a^2b^2}{L^2 + M^2 + N^2}. \qquad (c \text{ et } d)$$

Cette quantité est constante; donc, etc.

(14) « Si l'on projette trois diamètres conjugués sur un » plan diamétral, qu'on construise trois parallélepipèdes dont » chacun ait pour aretes contiguës un des diamètres et les

» projections des deux autres; la somme de leurs volumes sera
» constamment égale à abc. »

En effet, l'aire de la projection du parallélogramme $r'r''\sin r',r''$, sur le plan qui a pour équation

$$Lx+My+Nz=0,$$

est

$$\frac{Lbc\alpha+Mac\beta+Nab\gamma}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}}; \qquad (13)$$

la perpendiculaire abaissée de l'extrémité du diamètre r, sur ce plan, a pour longueur

$$\frac{La\alpha+Mb\beta+Nc\gamma}{\sqrt{L^2+M^2+N^2}};$$

donc le parallélepipède construit sur r et les projections de r' et r'' a pour volume

$$\frac{(Lbc\alpha+Mac\beta+Nab\gamma)(La\alpha+Mb\beta+Nc\gamma)}{L^2+M^2+N^2}$$
$$=\frac{abc(L^2\alpha^2+M^2\beta^2+N^2\gamma^2)}{L^2+M^2+N^2}$$
$$+\frac{LM(a^2+b^2)c\alpha\beta+LN(a^2+c^2)b\alpha\gamma+MN(b^2+c^2)a\beta\gamma}{L^2+M^2+N^2}.$$

On aura semblablement les volumes des deux autres parallélepipèdes construits, l'un sur r' et les projections de r et r'', et l'autre sur r'' et les projections de r et r'; l'on voit que leur somme se réduit à abc, en vertu des équations (c) et (d) du lemme. Donc, etc.

On prouverait facilement que :

« Si l'on projette trois diamètres conjugués sur une droite qui
» passe par le centre de la surface, et qu'on forme trois pa-
» rallélepipèdes dont chacun ait pour arêtes contiguës deux dia-
» mètres et la projection du troisième, leur somme sera égale
» à abc. »

(15) « Si l'on a six diamètres dont trois soient conjugués et
» les trois autres également conjugués entr'eux, le volume du pa-
» rallélepipède construit sur trois quelconques de ces diamètres
» sera égal à celui du parallélepipède construit sur les trois autres. »

En effet, le plan passant par les deux diamètres r', r'' a pour équation

$$bc\alpha x+ac\beta y+ab\gamma z=0; \qquad (13)$$

le sinus de l'angle qu'il fait avec le diamètre s, dont l'extrémite a pour coordonnées $x=a\xi$, $y=b\nu$, $z=c\zeta$, ξ, ν, ζ étant les cosinus des angles qu'un diamètre ρ fait avec les trois axes coordonnés, est

$$\sin(s, r'r'') = \frac{abc(\xi\alpha+\nu\beta+\zeta\gamma)}{s.r'r''\sin\widehat{r',r''}} = \frac{abc\cos\widehat{R,\rho}}{s.r'r''\sin\widehat{r',r''}};$$

d'où

$$r'r''\sin\widehat{r',r''}\times s.\sin(s,r'r'') = abc\cos\widehat{R,\rho}.$$

Le premier membre est le volume du parallélepipède construit sur r', r'' et s : si s est conjugué de r' et r'', ρ se confondra avec R; on aura $\cos\widehat{R,\rho}=1$, et ce volume se réduira à abc, comme nous l'avons déjà trouvé (11).

Il est clair qu'on obtiendrait de même

$$s's''\sin\widehat{s',s''}\times r.\sin(r,s's'') = abc\cos\widehat{\rho,R},$$

s', s'' et s étant trois diamètres conjugués; donc le volume du parallélepipède construit sur r', r'', s est égal au volume du parallélepipède construit sur s', s'', r; donc, etc.

(16) « La somme des carrés des volumes des trois parallélepipèdes construits sur un diamètre quelconque s, et sur deux » des trois diamètres conjugués r, r', r'', est constamment égale » à $a^2b^2c^2$. »

En effet, nous venons de trouver

$$r'r''\sin\widehat{r',r''}.s\sin(s,r'r'') = abc\cos\widehat{R,\rho};$$

on aura de même

$$rr''\sin\widehat{r,r''}.s\sin(s,rr'') = abc\cos\widehat{R',\rho},$$
$$rr'\sin\widehat{r,r'}.s\sin(s,rr') = abc\cos\widehat{R'',\rho};$$

élevant ces trois équations au carré, et les ajoutant membre à membre, on aura pour somme

$$a^2b^2c^2(\cos^2\widehat{R,\rho}+\cos^2\widehat{R',\rho}+\cos^2\widehat{R'',\rho}) = a^2b^2c^2,$$

puisque R, R', R'' sont rectangulaires. Donc, etc.

(17) « Si l'on a deux diamètres fixes s, s', et trois diamètres » conjugués r, r', r'', qu'on forme six parallélepipèdes dont trois » aient s, et les trois autres s', pour arête commune, et deux » des trois diamètres r, r', r'' pour autres arêtes contiguës; la

» somme des produits, deux à deux, des parallélepipèdes qui ont
» deux des arêtes r, r', r'' communes, est indépendante des dia-
» mètres r, r', r''. »

En effet, les volumes de ces six parallélepipèdes sont

$$r'r''\sin\widehat{r',r''}.\iota\sin(\iota,r'r'')=abc\cos\widehat{R,\rho},$$
$$r'r''\sin\widehat{r',r''}.\iota'\sin(\iota',r'r'')=abc\cos\widehat{R,\rho'},$$
$$rr''\sin\widehat{r,r''}.\iota\sin(\iota,rr'')=abc\cos\widehat{R',\rho},$$
$$rr''\sin\widehat{r,r''}.\iota'\sin(\iota',rr'')=abc\cos\widehat{R',\rho'},$$
$$rr'\sin\widehat{r,r'}.\iota\sin(\iota,rr')=abc\cos\widehat{R'',\rho},$$
$$rr'\sin\widehat{r,r'}.\iota'\sin(\iota',rr')=abc\cos\widehat{R'',\rho'}.$$

La somme des produits deux à deux de celles de ces quantités qui ne diffèrent que par ι et ι', est

$$a^2b^2c^2(\cos\widehat{R,\rho}.\cos\widehat{R,\rho'}+\cos\widehat{R',\rho}.\cos\widehat{R',\rho'}+\cos\widehat{R'',\rho}.\cos\widehat{R'',\rho'})$$
$$=a^2b^2c^2\cos\widehat{\rho,\rho'},$$

puisque les trois diamètres de R, R', R'' sont supposés rectangulaires; cette quantité est indépendante de r, r', r''; donc, etc.

(18) En ayant égard aux équations (e) du lemme, on trouve que le plan qui passe par les extrémités des trois diamètres conjugués r, r', r'' a pour équation

$$bc(\alpha+\alpha'+\alpha'')x+ac(\beta+\beta'+\beta'')y+ab(\gamma+\gamma'+\gamma'')z=abc.$$

Le plan tangent à l'extrémité du diamètre d, qui dérive de $D(\delta,\epsilon,\varphi)$, de même que r dérive de R (2), a pour équation

$$bc\delta x+ac\epsilon y+ab\varphi z=abc;$$

pour que ces deux plans soient parallèles, il faut qu'on ait

$$n\delta=\alpha+\alpha'+\alpha'',\quad n\epsilon=\beta+\beta'+\beta'',\quad n\varphi=\gamma+\gamma'+\gamma'',$$

et à cause de $\delta^2+\epsilon^2+\varphi^2=1$, on voit que $n=\sqrt{3}$, de sorte que

$$\delta=\frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{\sqrt{3}},\quad \epsilon=\frac{\beta+\beta'+\beta''}{\sqrt{3}},\quad \varphi=\frac{\gamma+\gamma'+\gamma''}{\sqrt{3}}.$$

On peut remarquer que le diamètre D, qui fait avec les trois axes des x, y, z des angles dont les cosinus sont δ, ϵ, φ, fait des angles égaux avec les trois diamètres R, R', R''.

L'équation du plan qui passe par les extrémités de r, r', r'' se réduit à

$$bc\delta x + ac\epsilon y + ab\varphi z = \frac{abc}{\sqrt{3}};$$

la comparant à celle du plan tangent

$$bc\delta x + ac\epsilon y + ab\varphi z = abc,$$

on voit que :

Les distances du plan qui passe par les extrémités de trois diamètres conjugués et du plan tangent qui lui est parallèle, au centre de la surface, sont entr'elles dans le rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

(19) Le diamètre d, qui est conjugué du plan qui passe par les extrémités de r, r', r'', perce ce plan au centre de la courbe qu'il détermine dans la surface; la distance de ce point à l'origine est, d'après ce qui précède, $\frac{d}{\sqrt{3}}$; donc, *ce point est sur une surface semblable et concentrique à la proposée.*

(20) Le diamètre d a la direction de la diagonale du parallélepipède construit sur r, r', r''; car les coordonnées

$$x = a\delta\sqrt{3} = a(\alpha + \alpha' + \alpha''),$$
$$y = b\epsilon\sqrt{3} = b(6 + 6' + 6''),$$
$$z = c\varphi\sqrt{3} = c(\gamma + \gamma' + \gamma''),$$

appartiennent à un point situé sur ce diamètre, et elles satisfont aux trois équations

$$\frac{1}{a}\alpha x + \frac{1}{b}6y + \frac{1}{c}\gamma z = 1,$$

$$\frac{1}{a}\alpha' x + \frac{1}{b}6' y + \frac{1}{c}\gamma' z = 1,$$

$$\frac{1}{a}\alpha'' x + \frac{1}{b}6'' y + \frac{1}{c}\gamma'' z = 1,$$

des plans tangens aux extrémités des diamètres r, r', r'', lesquelles représentent l'extrémité de la diagonale dont il s'agit. La longueur de cette diagonale est $d.\sqrt{3}$, ce qui fait voir que :

Le sommet du parallélepipède construit sur trois diamètres conjugués, engendre une surface semblable et concentrique à la proposée.

On obtient facilement l'équation de cette surface, en élevant au carré les trois équations précédentes, et les ajoutant membre à membre; le résultat est (c et d)

$$\frac{1}{a^2}x^2+\frac{1}{b^2}y^2+\frac{1}{c^2}z^2=3.$$

(21) « Le triangle formé par les extrémités des trois dia- » mètres conjugués r, r', r'', et le parallélogramme construit » sur deux diamètres conjugués situés dans un plan parallèle à celui » du triangle, sont entr'eux dans un rapport constant. »

En effet, le carré du parallelogramme construit sur deux diamètres conjugués de d est

$$b^2c^2\delta^2+a^2c^2\iota^2+a^2b^2\varphi^2=\frac{a^2b^2c^2}{D^2}. \qquad (11)$$

Or le parallélepipède construit sur r, r', r'' a pour volume

$$6.\Sigma.\tfrac{1}{3}\frac{D}{\sqrt{3}}=abc, \quad \text{ou} \quad 2\Sigma\frac{D}{\sqrt{3}}=abc,$$

Σ étant l'aire du triangle formé par les extrémités de r, r', r'', et $\frac{D}{\sqrt{3}}$ la perpendiculaire abaissée de l'origine sur son plan (18). Eliminant le produit abc entre cette équation et la précédente, on a

$$\Sigma^2=\tfrac{3}{4}(b^2c^2\delta^2+a^2c^2\iota^2+a^2b^2\varphi^2); \quad \frac{\Sigma}{\sqrt{b^2c^2\delta^2+a^2c^2\iota^2+a^2b^2\varphi^2}}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

donc, etc.

L'expression de Σ peut se mettre sous la forme $\Sigma=\frac{abc}{D}\frac{\sqrt{3}}{2}$; pour deux autres parallélepipèdes, on aurait

$$\Sigma'=\frac{abc}{D'}\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \Sigma''=\frac{abc}{D''}\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Il est facile de voir que *quand les plans des trois triangles* Σ, Σ', Σ'' *sont conjugués, la somme des carrés de leurs aires est une quantité constante;*

La somme des carrés de leurs projections sur un plan fixe, est également une quantité constante.

(22) « Si par le triangle formé par les extrémités de trois dia- » mètres conjugués r, r', r'', on fait passer trois prismes dont » les arêtes soient parallèles à trois autres diamètres conjugués

» r, r'; r'' respectivement, la somme des carrés des volumes
» qu'ils intercepteront dans le parallélepipède construit sur les
» diamètres $2r$, $2r'$, $2r''$ sera constamment égale à $3a^2b^2c^2$. »

En effet, l'équation du plan qui passe par les extrémités de r, r', r'' est

$$bc\delta x + ac\varepsilon y + ab\varphi z = \frac{abc}{\sqrt{3}}.$$

l'on sait que

$$\delta = \frac{\alpha+\alpha'+\alpha''}{\sqrt{3}}, \quad \varepsilon = \frac{\beta+\beta'+\beta''}{\sqrt{3}}, \quad \varphi = \frac{\gamma+\gamma'+\gamma''}{\sqrt{3}}; \quad (18)$$

le sinus de l'angle que ce plan fait avec le diamètre r, dont les coordonnées de l'extrémité sont $x=a\xi$, $y=b\upsilon$, $z=c\zeta$, est

$$(\sin r,\Sigma) = \frac{abc.(\xi\delta+\upsilon\varepsilon+\varphi\zeta)}{\sqrt{a^2\xi^2+b^2\upsilon^2+c^2\zeta^2}\,\sqrt{b^2c^2\delta^2+a^2c^2\varepsilon^2+a^2b^2\varphi^2}},$$

$$(\sin r,\Sigma) = \frac{abc.\cos\widehat{D,\rho}}{r.\frac{2\Sigma}{\sqrt{3}}} = \frac{abc\sqrt{3}.\cos\widehat{D,\rho}}{2r.\Sigma}; \qquad (20)$$

d'où

$$2r.\Sigma.\sin(r,\Sigma) = abc\sqrt{3}.\cos\widehat{D,\rho}.$$

On aura semblablement

$$2r'.\Sigma.\sin(r',\Sigma) = abc\sqrt{3}.\cos\widehat{D,\rho'},$$

$$2r''.\Sigma.\sin(r'',\Sigma) = abc\sqrt{3}.\cos\widehat{D,\rho''};$$

la somme des carrés de ces quantités est

$$[2r.\Sigma\sin(r,\Sigma)]^2 + [2r'.\Sigma\sin(r',\Sigma)]^2 + [2r''.\Sigma\sin(r'',\Sigma)]^2$$
$$= 3a^2b^2c^2(\cos^2\widehat{D,\rho} + \cos^2\widehat{D,\rho'} + \cos^2\widehat{D,\rho''}) = 3a^2b^2c^2,$$

puisque r, r', r'' étant conjugués, ρ, ρ', ρ'' sont rectangulaires (4).

Or $[2r.\Sigma\sin(r,\Sigma)]$ est le volume du prisme qui passe par le triangle Σ, a ses arêtes parallèles au diamètre r et est terminé aux plans tangens aux extrémités du diamètre $2r$; on voit semblablement ce qu'expriment les deux autres quantités; donc, etc.

(23) Si l'on projette sur le plan de deux droites fixes r', r'', par des droites toutes parallèles à leur diamètre conjugué r, les trois faces du parallélépipède construit sur trois diamètres

conjugués quelconques, la somme des carrés des trois projections est une quantité constante.

En effet, l'on a

$$\sin(s,r'r'')=\frac{abc\cos\widehat{R,\rho}}{s.r'r''\sin\widehat{r'r''}},\quad \sin(s,s's'')=\frac{abc}{s.s's''\sin\widehat{s',s''}},\quad (15)$$

et par conséquent

$$r'r''\sin\widehat{r'r''}.\frac{\sin(s,r'r'')}{\sin(s,s's'')}=s's''\sin\widehat{s',s''}\cos\widehat{R,\rho};$$

l'on aura de même

$$rr''\sin\widehat{r,r''}.\frac{\sin(s,rr'')}{\sin(s,s's'')}=s's''\sin\widehat{s',s''}\cos\widehat{R',\rho},$$

$$rr'\sin\widehat{r,r'}.\frac{\sin(s,rr')}{\sin(s,s's'')}=s's''\sin\widehat{s',s''}\cos\widehat{R'',\rho}.$$

Les premiers membres de ces trois équations sont les projections des parallélogrammes $r'r''\sin\widehat{r',r''}$, $rr''\sin\widehat{r,r''}$, $rr'\sin\widehat{r,r'}$, sur le plan des deux diamètres s', s'' par des droites parallèles à leur conjugué s; la somme des carrés de ces quantités est égale à $(s's''\sin\widehat{s',s''})^2$, puisque R, R', R'' étant rectangulaires, on a $\cos^2\widehat{R,\rho}+\cos^2\widehat{R',\rho}+\cos^2\widehat{R'',\rho}=1$. Donc, etc.

(24) « Si l'on forme trois parallélepipèdes qui aient trois dia-
» mètres conjugués r, r', r'' pour diagonales respectivement et
» dont les arêtes soient parallèles à trois autres diamètres con-
» jugués s, s', s'', la somme de leurs bases sur l'un des plans
» formés par ces derniers deux à deux, est égale à zéro. »

En effet, si par l'extrémité du diamètre r, on mène deux droites, la première parallèle au diamètre s, et terminée au plan de s' et s'', la seconde parallèle à s' et terminée au plan de s et s''; elles seront égales à $s\cos\widehat{R,\rho}$, $s'\cos\widehat{R,\rho'}$ respectivement, ce dont il est facile de s'assurer; le parallélepipède qui a le diamètre r pour diagonale, et dont les arêtes sont parallèles à s, s', s'', a donc pour expression de sa base sur le plan de s, s',

$$ss'\sin\widehat{s,s'}\cos\widehat{R,\rho}\cos\widehat{R,\rho'}.$$

Les bases des deux autres parallélepipèdes sur le même plan seront

$$ss'\sin\widehat{s,s'}\cos\widehat{R',\rho}\cos\widehat{R',\rho'},\quad ss'\sin\widehat{s,s'}\cos\widehat{R'',\rho}\cos\widehat{R'',\rho'};$$

la somme de ces trois quantités est

$$\mu' \sin \widehat{\iota,\iota'} \left(\cos \widehat{R,\rho} \cos \widehat{R,\rho'} + \cos \widehat{R',\rho} \cos \widehat{R',\rho'} + \cos \widehat{R'',\rho} \cos \widehat{R'',\rho'}\right)$$

$$= \mu' \sin \widehat{\iota,\iota'} \cos \widehat{\rho,\rho'} = 0.$$

Donc, etc.

On doit regarder la base d'un des parallélepipèdes sur le plan de ι et ι', par exemple, comme positive quand elle est comprise dans l'angle des diamètres ι, ι'; ou dans l'angle formé par leurs prolongemens, et comme négative quand elle est comprise entre un diamètre et le prolongement de l'autre.

(25) « Si, par le centre de l'ellipsoïde, on mène une droite » fixe, les plans tangens aux extrémités de trois diamètres con» jugués quelconques la rencontreront en trois points tels que la » somme des carrés des valeurs inverses de leurs distances au » centre de la surface sera une quantité constante. »

En effet, soient ξ, ν, ζ les cosinus des angles que cette droite fixe fait avec les trois axes coordonnés, et l, m, n les distances de l'origine aux points où elle perce les trois plans tangens aux extrémités des diamètres r, r', r'', on aura

$$\frac{1}{l} = \frac{1}{a}\xi\alpha + \frac{1}{b}\nu\beta + \frac{1}{c}\zeta\gamma,$$

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{a}\xi\alpha' + \frac{1}{b}\nu\beta' + \frac{1}{c}\zeta\gamma',$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{a}\xi\alpha'' + \frac{1}{b}\nu\beta'' + \frac{1}{c}\zeta\gamma''.$$

La somme des carrés de ces trois quantités est

$$\frac{1}{l^2} + \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} = \frac{1}{a^2}\xi^2 + \frac{1}{b^2}\nu^2 + \frac{1}{c^2}\zeta^2; \quad (c \text{ et } d)$$

le second membre est une quantité constante; donc, etc.

(26) On démontrerait de même le théorème suivant :

« Si, par le centre de l'ellipsoïde, l'on mène deux droites » fixes, les traces des plans tangens aux extrémités de trois dia» mètres conjugués, sur le plan de ces deux droites, formeront » avec elles trois triangles dont la somme des valeurs inverses » sera une quantité constante. »

(27) « Si l'on multiplie deux à deux et par le sinus de l'angle » qu'elles comprennent, les faces qui forment un angle trièdre

» du parallélepipède construit sur trois diamètres conjugués, la » somme des carrés des trois produits est une quantité cons» tante. »

En effet, le volume du parallélepipède construit sur r, r', r'', est

$$rr'r''\sqrt{1-\cos^2\widehat{r,r'}-\cos^2\widehat{r,r''}-\cos^2\widehat{r',r''}+2\cos\widehat{r,r'}\cos\widehat{r,r''}\cos\widehat{r',r''}}=abc;$$

multipliant et divisant le premier membre par $r\sin\widehat{r,r'}\sin\widehat{r,r''}$, l'on a

$$rr'\sin\widehat{r,r'}\,.\,rr''\sin\widehat{r,r''}\,\frac{\sqrt{1-\cos^2\widehat{r,r'}-\text{etc.}}}{\sin\widehat{r,r'}\sin\widehat{r,r''}}=abcr,$$

ou bien

$$rr'\sin\widehat{r,r'}\,.\,rr''\sin\widehat{r,r''}\sin D=abcr;$$

en appelant D l'angle dièdre dont l'arête est r, l'on aura de même

$$r'r\sin\widehat{r',r}\,.\,r'r''\sin\widehat{r',r''}\sin D'=abcr',$$

$$r''r\sin\widehat{r'',r}\,.\,r''r'\sin\widehat{r'',r'}\sin D''=abcr'',$$

D', D'' étant les angles dièdres dont les arêtes sont r', r''; la somme des carrés de ces trois quantités est égale à

$$a^2b^2c^2(r^2+r'^2+r''^2)=a^2b^2c^2(a^2+b^2+c^2);$$

donc, etc.

(28) « La somme des momens d'inertie d'un ellipsoïde, par » rapport à trois diamètres conjugués, multipliés par les carrés » de ces diamètres respectivement, est une quantité constante. »

En effet, les momens d'inertie de l'ellipsoïde, par rapport aux diamètres r, r', r'', sont

$$K=A\,\frac{a^2\alpha^2}{r^2}+B\,\frac{b^2\beta^2}{r^2}+C\,\frac{c^2\gamma^2}{r^2},$$

$$K'=A\,\frac{a^2\alpha'^2}{r'^2}+B\,\frac{b^2\beta'^2}{r'^2}+C\,\frac{c^2\gamma'^2}{r'^2},$$

$$K''=A\,\frac{a^2\alpha''^2}{r''^2}+B\,\frac{b^2\beta''^2}{r''^2}+C\,\frac{c^2\gamma''^2}{r''^2},$$

et l'on a $A=\frac{M}{5}(c^2+b^2)$, $B=\frac{M}{5}(c^2+a^2)$, $C=\frac{M}{5}(a^2+b^2)$, M étant la masse de l'ellipsoïde (Mécanique de M. Poisson,

tome II, page 81). D'après les équations (c) du lemme, il vient

$$Kr^2 + K'r'^2 + K''r''^2 = Aa^2 + Bb^2 + Cc^2$$
$$= \frac{M}{5}[a^2(c^2+b^2)+b^2(a^2+c^2)+c^2(a^2+b^2)]$$
$$= \frac{2.M}{5}(a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2);$$

cette quantité est constante. Donc, etc.

(29) « Si deux courbes S, S' sont tracées dans le plan Σ » qui passe par les extrémités de trois diamètres conjugués, » qu'on les projette, par des droites parallèles à ces diamètres, » sur les plans qu'ils forment deux à deux, et qu'on conçoive » six pyramides qui aient pour bases ces projections, et pour » sommet commun un point quelconque de la surface, la somme » des produits deux à deux de celles de ces pyramides dont » les bases sont sur le même plan, est égale au produit des » deux pyramides qui ont pour bases les deux courbes S, S', » et pour sommet commun le centre de la surface. »

En effet, soient r, r', r'' les trois diamètres conjugués; la projection de la courbe S sur le plan de r' et r'' est $S\frac{\sin(r,\Sigma)}{\sin(r,r'r'')}$; la pyramide qui a cette projection pour base, et l'extrémité du diamètre ρ pour sommet, a pour volume $\frac{S}{3}\frac{\sin(r,\Sigma)}{\sin(r,r'r'')}\rho.\sin(\rho,r'r'')$;

or $\rho\sin(\rho,r'r'') = \frac{abc\cos\widehat{R,\rho}}{r'r''\sin\widehat{r',r''}}$, (15), et $r\sin(r,r'r'') = \frac{abc}{r'r''\sin\widehat{r',r''}}$;

l'expression du volume devient $\frac{S}{3}r.\sin(r,\Sigma)\cos\widehat{R,\rho}$, ou $\frac{S}{3}K.\cos\widehat{R,\rho}$, en désignant par K la distance du plan Σ au centre de la surface. La pyramide qui a pour base la projection de S' sur le même plan $r'r''$, aura de même pour volume $\frac{S'}{3}K\cos\widehat{R,\rho}$; le produit de ces volumes est $\frac{SK}{3}.\frac{S'K}{3}\cos^2\widehat{R,\rho}$; les deux autres produits semblables seront, d'après cela, $\frac{SK}{3}.\frac{S'K}{3}\cos^2\widehat{R',\rho}$, $\frac{SK}{3}.\frac{S'K}{3}\cos^2\widehat{R'',\rho}$. La somme de ces trois produits est $\frac{SK}{3}.\frac{S'K}{3}(\cos^2\widehat{R,\rho}+\cos^2\widehat{R',\rho}+\cos^2\widehat{R'',\rho}) = \frac{SK}{3}.\frac{S'K}{3}$, puisque les trois diamètres R, R', R'' sont rectangulaires, résultat qui démontre le théorème énoncé.

En voici une seconde démonstration.

L'ellipsoïde rapporté à ses trois diamètres conjugués r, r', r'' a pour équation

$$\frac{X^2}{r^2}+\frac{Y^2}{r'^2}+\frac{Z^2}{r''^2}=1\text{, ou}$$

$$X^2\sin^2(r,\Sigma)+Y^2\sin^2(r',\Sigma)+Z^2\sin^2(r'',\Sigma)=K^2,$$

en appelant K la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan Σ qui passe par les extrémités de r, r', r''.

On peut écrire cette équation sous la forme :

$$X^2\sin^2(r,r'r'').\frac{SS'}{3.3}\cdot\frac{\sin^2(r,\Sigma)}{\sin^2(r,r'r'')}+Y^2\sin^2(r',rr'').\frac{SS'}{3.3}\cdot\frac{\sin^2(r',\Sigma)}{\sin^2(r',rr'')}$$

$$+\ Z^2\sin^2(r'',rr').\frac{SS'}{3.3}\cdot\frac{\sin^2(r'',\Sigma)}{\sin^2(r'',rr')}=\frac{SK}{3}\cdot\frac{S'K}{3},$$

dont l'inspection conduit à l'énoncé de la proposition.

Il est facile de voir que ce théorème et cette seconde démonstration s'appliquent à un nombre m de courbes situées dans le plan $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, pourvu que le sommet commun des $3m$ pyramides qui ont pour bases les projections de ces courbes sur les trois plans coordonnés, soit sur la surface

$$\frac{x^m}{a^m}+\frac{y^m}{b^m}+\frac{z^m}{c^m}=1.$$

Le théorème du n° 16 est un cas particulier du précédent.

(30) « Les propriétés du parallélepipède construit sur trois » diamètres conjugués appartiennent au parallélepipède qui a » ses arêtes dirigées suivant les perpendiculaires abaissées du » centre de la surface sur les faces du premier, et égales aux » valeurs inverses de ces perpendiculaires. »

Cet énoncé renferme plusieurs théorèmes auxquels il serait facile d'appliquer des démonstrations semblables aux précédentes ; mais en voici une qui est générale ; elle consiste à observer que si sur la perpendiculaire p abaissée de l'origine sur le plan tangent à l'extrémité du diamètre r, on prend une partie égale à sa valeur inverse, c'est-à-dire à $\frac{1}{p}$, on aura un diamètre de la surface $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1$, qui se déduira de la droite R, par rapport à cette surface, de la même manière que r s'est déduit de R dans la surface $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

Les trois perpendiculaires p, p', p'' abaissées de l'origine sur les faces du parallélepipède construit sur r, r', r'' sont donc dirigées suivant les trois diamètres de la surface $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1$, qu'on déduit des trois droites R, R', R''; et leurs valeurs inverses $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p''}$ sont égales à ces diamètres, lesquels sont conjugués quand R, R', R'' sont rectangulaires. Ainsi les droites $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p''}$ sont trois diamètres conjugués de la surface $a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=1$, en même tems que r, r', r'' sont des diamètres conjugués de la surface $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, ce qui démontre le théorème énoncé.

(31) Quand les trois diamètres $\frac{1}{p}$, $\frac{1}{p'}$, $\frac{1}{p''}$ sont rectangulaires, la somme des carrés de leurs valeurs inverses est constante, c'est-à-dire que $p^2+p'^2+p''^2=a^2+b^2+c^2$ (5); il suit de là que :

Le point d'intersection de trois plans rectangulaires tangens à la surface $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, *se meut sur la sphère* $x^2+y^2+z^2=a^2+b^2+c^2$ (*).

Car le carré de la distance du point d'intersection de ces trois plans à l'origine est $p^2+p'^2+p''^2=a^2+b^2+c^2$.

On peut démontrer ce théorème en observant que les conditions pour que les trois plans tangens aux extrémités des diamètres r, r', r'' soient rectangulaires, expriment que les trois diamètres R, R', R'' sont conjugués; que par conséquent la somme de leurs carrés est $a^2+b^2+c^2$ (8); or $R=p$, $R'=p'$, $R''=p''$ (3); donc $p^2+p'^2+p''^2=a^2+b^2+c^2$; donc *le point d'intersection*, etc.

(32) En voici une troisième démonstration.

Soit r_1 la longueur du diamètre qui dérive de r, de la même manière que nous avons déduit r de R (2); les coordonnées de l'extrémité de ce diamètre seront $x=\frac{a^2\alpha}{r}$, $y=\frac{b^2\beta}{r}$, $z=\frac{c^2\gamma}{r}$, et le plan tangent à l'ellipsoïde, en ce point, aura pour équation $\alpha x+\beta y+\gamma z=r$.

(*) Ce théorème, donné par M. Monge, a été démontré par M. Poisson, premier volume de la Correspondance, page 240, et Traité des Surfaces du second degré, page 234.

Ce plan est perpendiculaire au diamètre R, comme il est facile de le voir ; sa distance à l'origine est r ; donc si l'on a trois plans tangens à l'ellipsoïde et perpendiculaires aux trois droites rectangulaires R, R', R'' respectivement, leurs distances à l'origine seront r, r', r'', dont la somme des carrés est $a^2+b^2+c^2$; donc *le point d'intersection de trois plans rectangulaires tangens à un ellipsoïde se meut sur une sphère.*

On peut trouver l'équation de cette sphère sans chercher son rayon ; car les équations des trois plans tangens sont

$$\begin{aligned} \alpha x+\mathcal{C}y+\gamma z&=r,\\ \alpha' x+\mathcal{C}'y+\gamma' z&=r',\\ \alpha'' x+\mathcal{C}''y+\gamma'' z&=r''. \end{aligned}$$

Les élevant au carré et les ajoutant membre à membre, en ayant égard aux équations (c) et (d), on aura

$$x^2+y^2+z^2=r^2+r'^2+r''^2=a^2+b^2+c^2,$$

équation de la sphère sur laquelle se meut le point d'intersection des trois plans.

(33) Le carré de la longueur du diamètre r_1 est

$$r_1^2=\frac{a^4\alpha^2+b^4\mathcal{C}^2+c^4\gamma^2}{r^2};$$

d'où

$$r^2r_1^2=a^4\alpha^2+b^4\mathcal{C}^2+c^4\gamma^2;$$

on aura de même

$$\begin{aligned} r'^2r_1'^2&=a^4\alpha'^2+b^4\mathcal{C}'^2+c^4\gamma'^2,\\ r''^2r_1''^2&=a^4\alpha''^2+b^4\mathcal{C}''^2+c^4\gamma''^2, \end{aligned}$$

en appelant r_1', r_1'' les dérivés de r', r''.

La somme de ces trois quantités est

$$r^2r_1^2+r'^2r_1'^2+r''^2r_1''^2=a^4+b^4+c^4,$$

c'est-à-dire que *si l'on a trois diamètres conjugués et qu'on multiplie chacun d'eux par son dérivé, la somme des carrés des produits sera une quantité constante.*

Ou bien :

Si l'on a trois diamètres et qu'on multiplie chacun d'eux par la distance du centre de la surface au plan tangent à son extrémité, la somme des carrés des produits sera une quantité constante, quand les trois plans tangens seront rectangulaires.

(34) Soit ${}_{\scriptscriptstyle 1}R$ le diamètre d'où dérive R, de la même manière que r dérive de R; les cosinus des angles qu'il fait avec les axes seront $\frac{R\alpha}{a}$, $\frac{R\beta}{b}$, $\frac{R\gamma}{c}$; son extrémité aura pour coordonnées $x=\frac{{}_{\scriptscriptstyle 1}RR\alpha}{a}$, $y=\frac{{}_{\scriptscriptstyle 1}RR\beta}{b}$, $z=\frac{{}_{\scriptscriptstyle 1}RR\gamma}{c}$; les substituant dans l'équation $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, on aura

$$\frac{1}{{}_{\scriptscriptstyle 1}R^2R^2}=\frac{1}{a^4}\alpha^2+\frac{1}{b^4}\beta^2+\frac{1}{c^4}\gamma^2;$$

on aura de même

$$\frac{1}{{}_{\scriptscriptstyle 1}R'^2R'^2}=\frac{1}{a^4}\alpha'^2+\frac{1}{b^4}\beta'^2+\frac{1}{c^4}\gamma'^2,$$

$$\frac{1}{{}_{\scriptscriptstyle 1}R''^2R''^2}=\frac{1}{a^4}\alpha''^2+\frac{1}{b^4}\beta''^2+\frac{1}{c^4}\gamma''^2.$$

La somme de ces trois quantités est

$$\frac{1}{{}_{\scriptscriptstyle 1}R^2R^2}+\frac{1}{{}_{\scriptscriptstyle 1}R'^2R'^2}+\frac{1}{{}_{\scriptscriptstyle 1}R''^2R''^2}=\frac{1}{a^4}+\frac{1}{b^4}+\frac{1}{c^4},$$

c'est-à-dire que

Si l'on a trois diamètres et qu'on multiplie chacun d'eux par son dérivé, la somme des carrés des valeurs inverses des produits sera une quantité constante, quand ces trois dérivés seront rectangulaires.

Ou bien, en observant que la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent à l'extrémité de r a la direction de ${}_{\scriptscriptstyle 1}R$ et la longueur de R (32), on aura ce théorème :

Si du centre de l'ellipsoïde on abaisse trois perpendiculaires sur les faces du paralléllepipède construit sur trois diamètres conjugués, qu'on fasse le produit de chaque perpendiculaire par le diamètre de la surface dirigé suivant elle, la somme des carrés des valeurs inverses de ces trois produits sera une quantité constante.

(35) Appelons r_2 le diamètre qu'on déduit de r_1, de la même manière que r_1 se déduit de r; soit r_3 le diamètre qui se déduira semblablement de r_2; etc.

Le diamètre r_1 fait avec les axes des coordonnées des angles dont les cosinus sont $\frac{a^2\alpha}{rr_1}$, $\frac{b^2\beta}{rr_1}$, $\frac{c^2\gamma}{rr_1}$; si l'on prend sur ce diamètre une partie égale à $\mu=\overline{rr_1}$, son extrémité sera sur la

surface ayant pour équation $\frac{1}{a^4}x^2+\frac{1}{b^4}y^2+\frac{1}{c^4}z^2=1$; ce diamètre μ est, comme on voit, le dérivé de R par rapport à cette surface. Les dérivés de R', R'' sont semblablement $\mu'=\overline{r'r'_1}$, $\mu''=\overline{r''r''_1}$, et dirigés suivant r'_1, r''_1 respectivement. Ces diamètres μ, μ', μ'' seront conjugués quand R, R', R'' seront rectangulaires (4). Tout ce que nous avons dit des diamètres conjugués s'appliquera à μ, μ', μ''.

On verrait de même que les trois axes $\pi=\overline{rr_1r_2}$, $\pi'=\overline{r'r'_1r'_2}$, $\pi''=\overline{r''r''_1r''_2}$, dirigés suivant r_2, r'_2, r''_2, sont des diamètres conjugués de la surface $\frac{x^2}{a^6}+\frac{y^2}{b^6}+\frac{z^2}{c^6}=1$, quand R, R', R'' sont rectangulaires; ainsi

$$r^2r_1^2r_2^2+r'^2r_1'^2r_2'^2+r''^2r_1''^2r_2''^2=a^6+b^6+c^6;\ \text{etc., etc.}$$

(36) Les plans tangens aux extrémités des diamètres r_2, r'_2, r''_2 sont perpendiculaires aux diamètres r, r', r'' (32); leurs équations sont :

$$a\alpha x+b\beta y+c\gamma z=rr_1,$$
$$a\alpha'x+b\beta'y+c\gamma'z=r'r'_1,$$
$$a\alpha''x+b\beta''y+c\gamma''z=r''r''_1;$$

la somme de leurs carrés est

$$a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2=a^4+b^4+c^4;$$

donc *le point d'intersection de trois plans tangens à un ellipsoïde et perpendiculaires à trois diamètres conjugués, se meut sur un ellipsoïde concentrique au proposé.*

(37) Les plans tangens aux extrémités des trois diamètres r_3, r'_3, r''_3, ont pour équations

$$a^2\alpha x+b^2\beta y+c^2\gamma z=rr_1r_2,$$
$$a^2\alpha'x+b^2\beta'y+c^2\gamma'z=r'r'_1r'_2,$$
$$a^2\alpha''x+b^2\beta''y+c^2\gamma''z=r''r''_1r''_2,$$

dont la somme des carrés est

$$a^4x^2+b^4y^2+c^4z^2=a^6+b^6+c^6;$$

or ces trois plans sont perpendiculaires aux diamètres r_1, r'_1, r''_1 (32); donc :

Si après avoir mené trois plans rectangulaires tangens à un

ellipsoïde, on tire trois diamètres qui aboutissent à leurs points de contact, et qu'on mène trois plans tangens perpendiculaires à ces diamètres, leur point d'intersection se mouvra sur un ellipsoïde concentrique au proposé.

(38) L'on a $r^2 = a^2\alpha^2 + b^2\beta^2 + c^2\gamma^2$, ce qui exprime que le carré de r est égal à la somme des carrés des projections des trois rayons a, b, c dirigés suivant R, sur les axes des x, y, z respectivement.

Nous avons trouvé (11)

$$r^2r'^2\sin^2\widehat{r,r'} = a^2b^2(\alpha\beta'-\alpha'\beta)^2 + a^2c^2(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma)^2 + b^2c^2(\beta\gamma'-\beta'\gamma)^2;$$

or il est facile de s'assurer que $(\alpha\beta'-\alpha'\beta) = \sin\widehat{R,R'}\cos(RR',xy)$,

$$(\alpha\gamma'-\alpha'\gamma) = \sin\widehat{R,R'}\cos(RR',xz),\ (\beta\gamma'-\beta'\gamma) = \sin\widehat{R,R'}\cos(RR',zy);$$

il vient donc

$$r^2r'^2\sin^2\widehat{r,r'} = a^2b^2\sin^2\widehat{R,R'}\cos^2(RR',xy) + a^2c^2\sin^2\widehat{R,R'}\cos^2(RR',xz)$$
$$+ b^2c^2\sin^2\widehat{R,R'}\cos^2(RR',zy);$$

d'où l'on conclut que si l'on projette sur les plans xy, xz, yz les trois triangles formés par les rayons a et b, a et c, b et c, respectivement, ces rayons étant dirigés suivant R et R', la somme des carrés des trois projections est égale au carré du triangle formé par r et r'.

(39) « Le parallélepipède construit sur trois diamètres quel-
» conques r, r', r'', est égal en volume au parallélepipède cons-
» truit sur les trois axes a, b, c dirigés suivant les diamètres
» R, R', R''. »

En effet, le carré du volume du parallélepipède construit sur r, r', r'' est

$$\begin{aligned}
P^2 &= r^2r'^2r''^2[1-\cos^2\widehat{r,r'}-\cos^2\widehat{r,r''}-\cos^2\widehat{r',r''}+2\cos\widehat{r,r'}\cos\widehat{r,r''}\cos\widehat{r',r''}] \\
&= [(a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2)(a^2\alpha'^2+b^2\beta'^2+c^2\gamma'^2)(a^2\alpha''^2+b^2\beta''^2+c^2\gamma''^2) \\
&- (a^2\alpha''^2+b^2\beta''^2+c^2\gamma''^2)(a^2\alpha\alpha'+b^2\beta\beta'+c^2\gamma\gamma')^2 \\
&- (a^2\alpha'^2+b^2\beta'^2+c^2\gamma'^2)(a^2\alpha\alpha''+b^2\beta\beta''+c^2\gamma\gamma'')^2 \\
&- (a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2)(a^2\alpha'\alpha''+b^2\beta'\beta''+c^2\gamma'\gamma'')^2 \\
&+2(a^2\alpha\alpha'+b^2\beta\beta'+c^2\gamma\gamma')(a^2\alpha\alpha''+b^2\beta\beta''+c^2\gamma\gamma'')(a^2\alpha'\alpha''+b^2\beta'\beta''+c^2\gamma'\gamma'')].
\end{aligned}$$

Développant les différens termes de cette expression, on trouve que les coefficiens de a^6, b^6, c^6, a^4b^2, etc. sont nuls; il ne reste que le terme en $a^2b^2c^2$ qui peut être mis sous la forme :

$$P^2 = a^2b^2c^2[(\alpha^2+6^2+\gamma^2)(\alpha'^2+6'^2+\gamma'^2)(\alpha''^2+6''^2+\gamma''^2)$$
$$-(\alpha^2+6^2+\gamma^2)(\alpha'\alpha''+6'6''+\gamma'\gamma'')^2-(\alpha'^2+6'^2+\gamma'^2)(\alpha\alpha''+66''+\gamma\gamma'')^2$$
$$-(\alpha''^2+6''^2+\gamma''^2)(\alpha\alpha'+66'+\gamma\gamma')^2+\ldots\ldots$$
$$+2(\alpha\alpha'+66'+\gamma\gamma')(\alpha\alpha''+66''+\gamma\gamma'')(\alpha'\alpha''+6'6''+\gamma'\gamma'')]\,;$$

or on a $\alpha^2+6^2+\gamma^2=1$, $\alpha'^2+6'^2+\gamma'^2=1$, $\alpha''^2+6''^2+\gamma''^2=1$, $\alpha\alpha'+66'+\gamma\gamma'=\cos\widehat{R,R'}$, $\alpha\alpha''+66''+\gamma\gamma''=\cos\widehat{R,R''}$ et $\alpha'\alpha''+6'6''+\gamma'\gamma''=\cos\widehat{R',R''}$; ainsi

$$P^2 = a^2b^2c^2\left[1-\cos^2\widehat{R,R'}-\cos^2\widehat{R,R''}-\cos^2\widehat{R',R''}\right.$$
$$\left.+2\cos\widehat{R',R}\cos\widehat{R'',R}\cos\widehat{R'',R'}\right],$$

équation qui démontre le théorème énoncé.

Si r, r', r'' sont conjugués, R, R', R'' seront rectangulaires; alors on aura $P^2=a^2b^2c^2$, $P=abc$, comme nous l'avons trouvé (11).

Le carré du volume du parallélepipède construit sur r', r'' et ρ sera, en supposant r', r'' conjugués, c'est-à-dire R', R'' rectangulaires,

$$V^2=a^2b^2c^2(1-\cos^2\widehat{R',\rho}-\cos^2\widehat{R'',\rho})=a^2b^2c^2\cos^2\widehat{R,\rho}\,;$$

car $\cos^2\widehat{R,\rho}+\cos^2\widehat{R',\rho}+\cos^2\widehat{R'',\rho}=1$, puisque R, R', R'' sont rectangulaires; ainsi $V=abc\cos\widehat{R,\rho}$; il est clair qu'on trouverait la même expression pour le parallélepipède construit sur ρ', ρ'' et r, d'où suit le théorème du n° 15.

Cubature de l'ellipsoïde.

(40) Nous avons vu que la pyramide formée par les trois diamètres r, r', r'' a même volume que celle qui a pour arêtes les trois axes a, b, c dirigés suivant R, R', R''; celle-ci est égale en volume à celle qui aurait ses arêtes également dirigées suivant R, R', R'', mais toutes trois égales à $\theta=\sqrt[3]{abc}$. Or si l'on suppose les trois diamètres r, r', r'' infiniment rapprochés l'un de l'autre, de manière que la pyramide qu'ils forment puisse être regardée comme un élément de l'ellipsoïde, l'autre pyramide en sera un de la sphère qui a même centre que l'ellipsoïde et θ pour rayon. Cette sphère est donc telle qu'un de ses élémens a son égal dans l'ellipsoïde, et réciproquement. Donc la somme des élémens de la sphère est égale à la somme des élémens de l'ellipsoïde; donc cet ellipsoïde a pour expression de son volume $\frac{4}{3}\pi\theta^3=\frac{4}{3}\pi abc$.

Application à l'ellipsoïde de différentes propriétés de la sphère.

Concevons une surface rapportée à trois plans rectangulaires; déformons-la de manière que les coordonnées x, y, z d'un de ses points deviennent $X=\frac{a}{\theta}x$, $Y=\frac{b}{\theta}y$, $Z=\frac{c}{\theta}z$, a, b, c et θ étant trois quantités constantes. L'on formera ainsi une nouvelle surface qui sera du même degré que la proposée, puisque l'on a $x=\frac{\theta}{a}X$, $y=\frac{\theta}{b}Y$, $z=\frac{\theta}{c}Z$; nous appellerons cette nouvelle surface *dérivée* de la première.

Cette transformation donne le moyen d'appliquer à une surface des théorèmes qu'on sait appartenir à une autre surface du même degré.

Soit, par exemple, la sphère qui a pour équation

$$x^2+y^2+z^2=\theta^2;$$

sa dérivée sera la surface de l'ellipsoïde représenté par

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}+\frac{Z^2}{c^2}=1.$$

La courbe dérivée d'un cercle de la sphère sera une courbe plane; la surface dérivée d'un cône tangent à la sphère sera un cône tangent à l'ellipsoïde; donc *la courbe de contact d'un cône et d'un ellipsoïde est une courbe plane.*

Par deux cercles d'une sphère on peut faire passer deux cônes; donc *par deux courbes planes d'un ellipsoïde on peut faire passer deux cônes.*

La courbe dérivée d'un grand cercle de la sphère est située dans un plan diamétral de l'ellipsoïde, par conséquent plusieurs des théorèmes de la théorie des transversales sphériques s'appliquent à des courbes tracées sur la surface d'un ellipsoïde, dans des plans passant par son centre.

Toutes les sphères ont pour dérivées des surfaces semblables et semblablement placées entr'elles.

Car soit

$$(x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2=i^2$$

l'équation d'une sphère; celle de sa dérivée sera

$$\left(\frac{\theta}{a}X-l\right)^2+\left(\frac{\theta}{b}Y-m\right)^2+\left(\frac{\theta}{c}Z-n\right)^2=i^2,$$

ou

$$\frac{1}{a^2}\left(X-\frac{al}{\theta}\right)^2+\frac{1}{b^2}\left(Y-\frac{bm}{\theta}\right)^2+\frac{1}{c^2}\left(Z-\frac{cn}{\theta}\right)^2=\frac{i^2}{\theta^2},$$

et l'on voit que cette surface est semblable à celle qui a pour équation

$$\frac{1}{a^2}X^2+\frac{1}{b^2}Y^2+\frac{1}{c^2}Z^2=1.$$

Son centre, dont les coordonnées sont $\frac{a}{\theta}l$, $\frac{b}{\theta}m$, $\frac{c}{\theta}n$, est le point dérivé du centre de la sphère $(x-l)^2+(y-m)^2+(z-n)^2=i^2$.

D'après cela, les théorèmes relatifs aux contacts des sphères ont lieu pour des ellipsoïdes semblables et semblablement placés.

Ainsi le centre d'un ellipsoïde s. et s. p. (semblable et semblablement placé), et tangent à deux autres, se meut sur une surface du second degré.

Le centre d'un ellipsoïde s., s. p. et tangent à trois autres, se meut sur une courbe du second degré.

La suite des points de contact de cet ellipsoïde et de l'un des trois autres, est une courbe plane;

Etc., etc.

Mais il n'est pas nécessaire de démontrer d'abord pour des sphères tous ces théorèmes, pour ensuite les appliquer, ainsi que nous venons de le faire, aux ellipsoïdes; il est facile de les démontrer généralement pour des surfaces du second degré ss. et s. ps., soit par l'analyse, soit en ne posant aucune équation.

Le même mode de transformation peut aussi servir pour résoudre des problèmes de Géométrie descriptive.

Il sera facile, par exemple, de trouver, avec la ligne droite et le cercle, les points d'intersection d'une droite et d'un ellipsoïde dont on connaîtra les six sommets; de mener par une droite un plan tangent à cet ellipsoïde, etc.

Une propriété importante de notre système de transformation est que

« Le volume d'un corps quelconque est le même que celui » de son dérivé, quand $\theta=\sqrt[3]{abc}$. »

Pour le prouver, prenons d'abord une pyramide triangulaire située d'une manière quelconque par rapport aux trois plans coordonnés; l'expression de son volume se compose, comme on sait, d'une suite de produits de trois facteurs qui sont des coordonnées des sommets de la pyramide; et les coordonnées de

chaque facteur sont différentes, c'est-à-dire sont dirigées, l'une suivant l'axe des x, l'autre suivant l'axe des y, et la troisième suivant l'axe des z; (*) par conséquent la pyramide dérivée aura pour volume la même expression multipliée par $\frac{abc}{t^3}$; mais je suppose que $t^3 = abc$; donc les deux pyramides auront même volume.

Or tout corps peut être regardé comme composé d'une infinité de pyramides triangulaires infiniment petites qui auront toutes leurs égales en volume dans son dérivé; donc le théorème est démontré.

Il suit de là qu'une portion quelconque de l'ellipsoïde $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1$ aura même volume qu'une portion correspondante de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = (\sqrt[3]{abc})^2$, et que par conséquent l'ellipsoïde aura pour volume $\frac{4}{3}\pi abc$.

Il suit aussi de ce qui précède que quand le sommet d'un cône tangent à un ellipsoïde se meut sur la surface d'un ellipsoïde s., s. p. et concentrique au premier,

1°. Le volume compris entre la surface du cône et celle de l'ellipsoïde, depuis le sommet jusqu'à la courbe de contact, est constamment le même;

2°. Le volume du segment déterminé dans l'ellipsoïde par le plan de la courbe de contact du cône, est toujours le même;

3°. Le volume du secteur semblablement déterminé reste également le même;

Etc., etc.

Démonstration des théorèmes sur les surfaces du second degré, énoncés par M. Monge, Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, tom. II, p. 319; par M. CHASLES.

(1) « Lorsque deux surfaces quelconques du second degré » sont concentriques, il y a toujours dans chacune d'elles trois » diamètres conjugués dont les directions sont les mêmes que » celles de trois diamètres conjugués considérés dans l'autre. »

En effet, supposons les deux surfaces rapportées à trois axes qui soient les diamètres conjugués rectangulaires de la première; elles auront pour équations

---

(*) Journal de l'Ecole Polytechnique, 15e cahier, page 97.

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + 2D'yz + 2E'xz + 2F'xy = 1.$$

Menons par l'origine trois nouveaux axes ox', oy', oz', dont les équations soient

$\left.\begin{matrix} x = az \\ y = bz \end{matrix}\right\}$ pour le 1er, $\left.\begin{matrix} x = a'z \\ y = b'z \end{matrix}\right\}$ pour le 2e, et $\left.\begin{matrix} x = a''z \\ y = b''z \end{matrix}\right\}$ pour le 3e;

les formules qui serviront à passer du système d'axes rectangulaires ox, oy, oz, aux axes obliques ox', oy', oz', seront : (Traité des Surfaces du second degré, par M. Hachette, p. 120.)

$$x = \frac{ax'}{\sqrt{a^2+b^2+1}} + \frac{a'y'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}} + \frac{a''z'}{\sqrt{a''^2+b''^2+1}},$$
$$y = \frac{bx'}{\sqrt{a^2+b^2+1}} + \frac{b'y'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}} + \frac{b''z'}{\sqrt{a''^2+b''^2+1}},$$
$$z = \frac{x'}{\sqrt{a^2+b^2+1}} + \frac{y'}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}} + \frac{z'}{\sqrt{a''^2+b''^2+1}}.$$

Si l'on substitue ces valeurs de x, y, z dans les équations des deux surfaces, et qu'on égale à zéro les coefficiens des termes en $x'y'$, $x'z'$, $y'z'$, pour exprimer que les trois axes ox', oy', oz' sont, dans chacune des surfaces, trois diamètres conjugués, on aura les six équations......(A)

$$\left\{\begin{array}{r} Aaa' + Bbb' + C = 0, \\ Aaa'' + Bbb'' + C = 0, \\ Aa'a'' + Bb'b'' + C = 0, \\ A'aa' + B'bb' + C' + D'(b+b') + E'(a+a') + F'(ab'+ba') = 0, \\ A'aa'' + B'bb'' + C' + D'(b+b'') + E'(a+a'') + F'(ab''+ba'') = 0, \\ A'a'a'' + B'b'b'' + C' + D'(b'+b'') + E'(a'+a'') + F'(a'b''+b'a'') = 0, \end{array}\right.$$

lesquelles donneront les valeurs des six inconnues a, b, a', b', a'', b''.

Multiplions la première par a'', et la seconde par a', et retranchons-les l'une de l'autre; puis multiplions la première par b'' et la deuxième par b', et retranchons-les encore l'une de l'autre; nous aurons les deux suivantes :

$$Bb(a'b'' - b'a'') + C(a' - a'') = 0,$$
$$Ac(a'b'' - b'a'') + C(b'' - b') = 0;$$

faisant les mêmes opérations sur la quatrième et la cinquième des équations (A), on obtiendra

$$(B'b+F'a+D')(a'b''-a''b')+(D'b+E'a+C')(a'-a'')=0,$$
$$(A'a+F'b+E')(a'b''-a''b')+(D'b+E'a+C')(b''-b')=0;$$

éliminant $\frac{a'b''-b'a''}{a'-a''}$ entre la première et la troisième de ces quatre équations, et $\frac{a'b''-b'a''}{b''-b'}$ entre la seconde et la quatrième, on parvient à deux équations qui ne contiennent que a et b; elles sont

$$(B'b+F'a+D')C-(D'b+E'a+C')Bb=0,$$
$$(A'a+F'b+E')C-(D'b+E'a+C')Aa=0.$$

Si de cette dernière, qui ne contient b qu'à la première puissance, on tire la valeur de cette inconnue, et qu'on la substitue dans l'autre équation, les termes en a^4 se détruiront, et il restera une équation du troisième degré qui donnera toujours une valeur réelle pour a; mettant cette valeur dans la seconde des équations précédentes, on aura une valeur réelle correspondante de b. Ces deux valeurs de a et b détermineront la position de l'axe ox'; on les substituera dans la première et la quatrième des équations (A), on aura par là deux équations du premier degré en a' et b', desquelles on tirera des valeurs réelles pour ces deux inconnues; les mettant dans les troisième et sixième équations (A), on aura deux équations qui donneront des valeurs réelles pour a'' et b''. Ainsi les trois axes ox', oy', oz' seront parfaitement déterminés et pourront toujours l'être; donc le théorème est démontré.

Les équations (A) étant symétriques par rapport aux inconnues, les valeurs de a, a', a'' doivent être données par la même équation; mais nous venons de voir que cette équation n'est que du troisième degré; elle ne donne donc qu'une valeur pour chacune des inconnues a, a', a''; donc, en général, il n'existe qu'un système d'axes qui satisfasse à la question.

Si la première surface est une sphère, les trois axes ox', oy', oz' sont rectangulaires, donc :

Dans toute surface du second degré il existe trois axes coordonnés rectangulaires pour lesquels l'équation de la surface ne renferme pas les rectangles xy, xz, yz. (Traité des surfaces du second degré, page 162).

M. Monge appelle *droites diamétrales conjuguées communes* les trois directions des trois diamètres conjugués qui sont parallèles entr'eux respectivement dans les deux surfaces.

(2) Les équations des deux surfaces, rapportées à leurs trois droites diamétrales conjuguées communes, sont

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 = 1;$$

éliminant successivement x, y et z entre ces deux équations, on a les trois suivantes :

$$(AB'-BA')y^2 + (AC'-CA')z^2 = A-A',$$
$$(AB'-BA')x^2 - (BC'-CB')z^2 = B'-B,$$
$$(AC'-CA')x^2 + (BC'-CB')y^2 = C'-C,$$

qui représentent les projections de l'intersection des deux surfaces sur les trois plans coordonnés ; par conséquent cette intersection est toujours comprise en même tems sur les surfaces de trois cylindres qui ont pour bases des sections coniques et qui sont parallèles aux trois droites diamétrales conjuguées communes.

Cela fournit une construction des trois droites diamétrales conjuguées communes qui deviennent, comme je l'ai déjà observé, les trois axes rectangulaires de l'une des deux surfaces, lorsque l'autre est celle d'une sphère.

Quels que soient les signes des trois quantités $(AB'-BA')$, $(AC'-CA')$, $(BC'-CB')$, dont le dernier n'est plus arbitraire quand les deux autres sont différens, deux des trois courbes que représentent les trois équations précédentes sont du genre de l'ellipse, et l'autre du genre de l'hyperbole.

(3) Supposons qu'on fasse croître proportionnellement les trois paramètres A', B', C' ; on aura une suite de surfaces toutes concentriques, semblables entr'elles et semblablement placées ; leur équation générale est

$$n(A'x^2 + B'y^2 + C'z^2) = 1;$$

chaque valeur de n donne une de ces surfaces.

Faisons $n = \frac{A}{A'}$, auquel cas la nouvelle surface et la première, dont l'équation est $Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1$, ont leurs diamètres suivant l'axe des-x égaux.

L'équation de la projection de leur intersection sur le plan des yz est

$$(AB'-BA')y^2 + (AC'-CA')z^2 = 0;$$

soit $AB'-BA'>0$, $AC'-CA'>0$; cette équation donne $y=0$, $z=0$; donc les deux surfaces se touchent en deux points situés sur l'axe des x, et n'ont pas d'autres points communs.

Donnons à n une autre valeur égale à $\frac{B}{B'}$; l'intersection de la nouvelle surface et de la première a pour projection sur le plan des xz,

$$(AB'-BA')x^2-(BC'-CB')z^2=0\,;$$

soit $BC'-CB'>0$; nous avons déjà posé $AB'-BA'>0$; par conséquent cette équation représente deux droites passant par l'origine; donc, dans ce cas où les deux surfaces ont leurs diamètres suivant l'axe des y égaux, elles se coupent suivant deux courbes planes dont les points d'intersection sont sur l'axe des y; il est clair qu'en ces points les deux surfaces se touchent.

Supposons enfin à n la valeur $\frac{C}{C'}$; la projection de l'intersection de la surface fixe et de la nouvelle, sur le plan des xy, est

$$(AC'-CA')x^2+(BC'-CB')y^2=0,$$

l'on a $AC'-CA'>0$, $BC'-CB'>0$; donc cette équation donne $x=0$, $y=0$, et par conséquent les deux surfaces se touchent en deux points situés sur l'axe des z et n'ont pas d'autres points communs.

On peut faire d'autres combinaisons sur les signes des quantités $(AB'-BA')$, $(AC'-CA')$, $(BC'-CB')$, mais on parvient toujours à ce théorème :

« Les trois droites diamétrales conjuguées communes ne jouissent
» pas toutes trois des mêmes propriétés. Pour deux de ces droites,
» si les diamètres des deux surfaces qui se trouvent sur l'une
» d'elles sont égaux entr'eux, les surfaces se touchent dans deux
» points diamétralement opposés, et n'ont pas d'autres points
» communs : pour la troisième, si les diamètres des deux sur-
» faces sont égaux entr'eux, non-seulement les deux surfaces se
» touchent en deux points diamétralement opposés, mais encore
» elles se coupent dans le système de deux courbes planes pour
» lesquelles les deux points de contact des surfaces sont deux
» points d'intersection. »

Cela oblige à distinguer les trois droites diamétrales conjuguées communes en deux *extrêmes* et une *moyenne*.

L'axe des x, par exemple, sera une droite diamétrale conjuguée commune extrême, ou moyenne, suivant que les deux coefficiens de y^2 et z^2 dans l'équation

$$AB'-BA')y^2+(AC'-CA')z^2=-A'$$

de la projection de l'intersection des deux surfaces sur le plan des yz, seront de mêmes signes ou de signes différens.

(4) Dans le cas général, c'est-à-dire lorsque les deux surfaces quelconques du second degré ne sont pas concentriques, et quelque part que soient placés leurs centres, il y a toujours dans chacune d'elles trois diamètres conjugués qui sont respectivement parallèles à trois diamètres conjugués considérés dans l'autre.

Car si l'on conçoit une troisième surface concentrique à la première, semblable et semblablement placée à la seconde, elle a, d'après ce qui précède, trois diamètres conjugués respectivement parallèles à trois diamètres conjugués de la première; mais tous ses diamètres conjugués sont parallèles à des diamètres conjugués de la seconde surface; donc deux surfaces quelconques du second degré ont chacune trois diamètres conjugués parallèles à trois diamètres conjugués de l'autre.

Nous appellerons toujours *droites diamétrales conjuguées communes* les droites parallèles à ces diamètres; deux sont extrêmes et la troisième moyenne.

Si l'on rapporte les deux surfaces à ces trois droites diamétrales, par des coordonnées qui soient respectivement parallèles à ces droites, leurs équations seront

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$A'(x-a)^2 + B'(y-b)^2 + C'(z-c)^2 = 1,$$

la première surface ayant son centre à l'origine des coordonnées, et la seconde au point dont les coordonnées sont a, b, c.

(5) Voyons ce qui a lieu quand les deux surfaces se touchent.

Si elles se touchent en deux points, elles ont deux plans tangens communs en ces points; or on sait que le plan qui passe par la droite d'intersection de deux plans tangens à une surface du second degré, et par le milieu de la droite qui joint les deux points de contact, contient le centre de la surface et est diamétral opposé à cette droite; donc le plan qui passe par les centres des deux surfaces et par le milieu de la droite qui joint leurs points de contact est, dans les deux surfaces, plan diamétral opposé à cette droite, laquelle est par conséquent parallèle à l'une des trois droites diamétrales conjuguées communes aux deux surfaces. Examinons à laquelle.

Les deux surfaces devant avoir leurs centres dans le plan diamétral opposé à l'une des droites conjuguées communes, supposons que ce soit dans le plan des yz; leurs équations seront

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$A'x^2 + B'(y-b)^2 + C'(z-c)^2 = 1.$$

L'intersection de ces deux surfaces a pour projection sur le plan des yz la courbe représentée par l'équation

$$(AB'-BA')y^2+(AC'-CA')z^2-2AB'by-2AC'cz$$
$$+AB'b^2+AC'c^2=A-A',$$

qui peut se mettre sous la forme

$$(B)\ldots\begin{cases}\quad(AC'-CA')\{(AB'-BA')y-AB'b\}^2\\+(AB'-BA')\{(AC'-CA')z-AC'c\}^2\\+(AB'b^2+AC'c^2+A'-A)(AC'-CA')(AB'-BA')\\-(AC'-CA')A^2B'^2b^2-(AB'-BA')A^2C'^2c^2=0.\end{cases}$$

Or, si les deux surfaces se touchent, pour chaque point de contact les valeurs de $\frac{dx}{dy}$, $\frac{dx}{dz}$, tirées de la première équation, sont égales aux valeurs de $\frac{dx}{dy}$, $\frac{dx}{dz}$ tirées de la seconde; ainsi l'on a

$$\frac{By}{Ax}=\frac{B'(y-b)}{A'x},\qquad \frac{Cz}{Ax}=\frac{C'(z-c)}{A'x},$$

ou bien

$$(AB'-BA')y-AB'b=0,\quad (AC'-CA')z-AC'c=0;$$

les valeurs de y et z que donnent ces deux équations sont les coordonnées des points de contact des deux surfaces; ces points se trouvent sur leur intersection, ainsi ces valeurs doivent satisfaire à l'équation (B); pour cela il faut qu'on ait

$$(AB'b^2+AC'c^2+A'-A)(AC'-CA')(AB'-BA')$$
$$-(AC'-CA')A^2B'^2b^2-(AB'-BA')A^2C'^2c^2=0;$$

telle est la condition nécessaire pour que les deux surfaces se touchent. D'après cela, l'équation (B) se réduit à

$$(B')\ldots\begin{cases}\quad(AC'-CA')\{(AB'-BA')y-AB'b\}^2\\+(AB'-BA')\{(AC'-CA')z-AC'c\}^2=0.\end{cases}$$

Lorsque les deux coefficiens $(AB'-BA')$, $(AC'-CA')$ sont de même signe, cette équation fournit les deux autres,

$$(AB'-BA')y-AB'b=0,\quad (AC'-CA')z-AC'c=0,$$

qui représentent un point sur le plan des yz; les deux surfaces se touchent donc en deux points situés sur une droite parallèle à l'axe des x, et n'ont pas d'autres points communs;

dans ce cas l'axe des x est une droite diamétrale conjuguée commune extrême (3).

Lorsque les deux coefficiens $(AB'-BA')$, $(AC'-CA')$ sont de signes différens, l'équation (B') représente deux plans se coupant suivant une droite parallèle à l'axe des x; donc les deux surfaces se coupent suivant deux courbes planes en même tems qu'elles se touchent; mais dans ce cas l'axe des x est parallèle à la droite diamétrale conjuguée commune moyenne. On peut donc conclure ce théorème :

« Lorsque deux surfaces quelconques se touchent en deux » points, la corde commune qui passe par les deux points de contact » est toujours parallèle à l'une des trois droites diamétrales con- » juguées communes : cette droite est une des extrêmes, si les » deux surfaces n'ont d'autres points communs que leurs points » de contact; elle est, au contraire, la droite diamétrale » moyenne, si les deux surfaces se coupent en même tems qu'elles » se touchent, et alors l'intersection est composée du système » de deux courbes planes pour lesquelles les deux points de » contact des surfaces sont deux points d'intersection. »

L'équation (B') fait voir que les deux surfaces et le système des deux plans de leurs courbes d'intersection ont les mêmes droites diamétrales conjuguées communes.

(6) « Lorsque deux surfaces du second degré se coupent sui- » vant deux courbes planes, ces deux surfaces et le système des » deux plans de leurs courbes d'intersection ont les mêmes droites » diamétrales conjuguées communes ; la moyenne de ces droites » est parallèle à la droite d'intersection des deux plans. »

Nous venons de voir que ce théorème a lieu dans le cas où les deux surfaces se touchent en même tems qu'elles se coupent; démontrons-le généralement.

Par les deux courbes d'intersection des deux surfaces on peut faire passer deux cônes (Correspondance, tome III, p. 14); leurs sommets et les centres de ces deux courbes sont dans un même plan qui contient les centres des deux surfaces ; ce plan est dans chacune de ces surfaces plan diamétral opposé à la droite d'intersection des plans de leurs deux courbes communes ; cette droite est donc une des trois droites diamétrales conjuguées communes aux deux surfaces, et ce plan diamétral contient les deux autres.

Prenons-le pour plan des xz, les deux surfaces auront pour équations rapportées à leurs trois droites diamétrales conjuguées communes,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$A'(x-a)^2 + B'y^2 + C'(z-c)^2 = 1;$$

celle de la projection de leur intersection sur le plan des xy sera

$$(AB'-BA')x^2-(BC'-CB')z^2+2BA'ax+2BC'cz$$
$$=B'-B+BA'a^2+BC'c^2,$$

et devra représenter deux droites, puisque les deux surfaces se coupent suivant deux courbes planes dont les plans sont parallèles à l'axe des y.

Or, pour que cette équation représente deux droites, il faut

1°. Que $(AB'-BA')$ et $(BC'-CB')$ soient de mêmes signes, ce qui prouve que l'axe des y est la droite diamétrale conjuguée commune moyenne des deux surfaces (3) ;

2°. Que l'on ait la condition

$$(BA'a^2+BC'c^2+B'-B)(AB'-BA')(BC'-CB')$$
$$+(BC'-CB')B^2A'^2a^2-(AB'-BA')B^2C'^2c^2=0.$$

D'après cela, l'équation précédente prend la forme :

$$(AB'-BA')\{(BC'-CB')z-BC'c\}^2$$
$$-(BC'-CB')\{(AB'-BA')x+BA'a\}^2=0,$$

et l'on voit qu'elle représente deux plans parallèles à l'axe des y ; le système de ces deux plans forme une surface du second degré rapportée à trois de ses axes conjugués.

Ainsi les deux surfaces proposées et le système des deux plans de leurs courbes d'intersection ont les mêmes droites diamétrales conjuguées communes ; la moyenne de ces droites est parallèle à l'intersection des deux plans.

De ce théorème on pourrait déduire tout le précédent.

On peut en conclure aussi que quand deux surfaces se touchent en deux points sans se couper, ces deux surfaces et le système de leurs deux plans tangens communs ont les mêmes droites diamétrales conjuguées communes. Car alors les deux surfaces peuvent être considérées comme se coupant suivant deux courbes planes infiniment petites, par lesquelles passent leurs deux plans tangens communs.

(7) « Deux surfaces quelconques du second degré étant données, si, 1°. leurs centres sont placés sur une même droite » diamétrale conjuguée commune extrême ; et si, 2°. les sections faites dans les deux surfaces par le plan diamétral opposé à cette droite, sont semblables entr'elles, l'intersection des » deux surfaces est composée du système de deux courbes planes » du second degré, semblables entr'elles, semblablement placées » et dont les deux plans sont parallèles au plan diamétral, et » par conséquent parallèles entr'eux. »

En effet, supposons que le centre de la première surface étant à l'origine des coordonnées, celui de la seconde soit sur l'axe des x, les équations des deux surfaces seront

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1,$$
$$A'(x-a)^2 + B'y^2 + C'z^2 = 1,$$

et l'on aura la condition $BC' - CB' = 0$, qui exprime que les sections des deux surfaces par le plan des yz sont semblables entr'elles.

Multipliant la première équation par B' et la seconde par B, et les retranchant l'une de l'autre, on a

$$(AB' - BA')x^2 + 2A'Bax - (BA'a^2 + B' - B) = 0,$$

équation qui représente deux plans parallèles au plan des yz, sur lesquels se trouvent les courbes d'intersection des deux surfaces. Si l'on substitue successivement dans l'une des deux équations de ces surfaces, les deux valeurs de x tirées de la précédente, on aura les équations de ces deux courbes, qui sont semblables et semblablement placées à celle que représente l'équation $By^2 + Cz^2 = 1$.

Il faut que l'axe des x, sur lequel sont les centres des deux surfaces, soit une droite diamétrale conjuguée commune extrême; car les plans des deux courbes d'intersection doivent être parallèles à la droite diamétrale moyenne (6), ce qui n'aurait pas lieu si cette droite était l'axe des x.

Lorsque les deux valeurs de x données par l'équation précédente sont égales, les deux courbes d'intersection se confondent en une seule, et par conséquent les deux surfaces sont circonscrites l'une à l'autre, c'est-à-dire qu'elles se touchent dans une courbe. Cette courbe est plane et son plan est parallèle au plan diamétral opposé à la droite menée par les centres des deux surfaces.

(8) Réciproquement : « Lorsque deux surfaces du second » degré sont circonscrites l'une à l'autre, 1°. leur courbe de con- » tact est plane; 2°. la droite qui joint leurs centres est pa- » rallèle à l'une de leurs droites diamétrales conjuguées com- » munes extrêmes; 3°. le plan de leur courbe de contact est » parallèle au plan diamétral opposé à cette droite. »

1°. Si par trois points de la courbe de contact des deux surfaces on mène trois plans tangens à l'une d'elles, ils seront tangens à l'autre.

Concevons deux cônes qui aient leurs sommets au point d'intersection de ces trois plans, et qui soient tangens, l'un à la première surface, et l'autre à la seconde. Les deux courbes de

contact seront planes et passeront par les trois points par lesquels nous avons mené les trois plans tangens, ainsi elles se toucheront en ces points et seront situées dans leur plan, ce qui exige qu'elles se confondent en une seule commune aux deux surfaces, qui par conséquent se touchent suivant une courbe plane.

2°. et 3°. Les centres des deux surfaces doivent se trouver sur la droite qui joint le centre de leur courbe de contact avec le sommet du cône qui leur est tangent suivant cette courbe; et le plan diamétral opposé à cette droite dans chacune des surfaces, est parallèle au plan de la courbe de contact du cône; donc cette droite est une des droites diamétrales conjuguées communes aux deux surfaces; il est facile de voir qu'elle est une des extrêmes; car les deux surfaces se coupent suivant deux courbes dont les plans se confondent en un seul, qui doit être parallèle à la droite diamétrale commune moyenne des deux surfaces (6); cette droite moyenne ne peut donc être la ligne des centres, laquelle par conséquent est une droite extrême.

(9) *Lemme.* « Lorsque deux courbes du second degré » $\overparen{BMCN}$, $\overparen{DMEN}$ touchent une troisième courbe du second » degré $\overparen{BDCE}$ (*fig.* 1), aux points B, C pour la première, et » D, E pour la seconde; ces deux courbes se coupent en quatre » points M, N, P, Q, tels que les droites $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ passent » par le point d'intersection des deux droites $\overline{BC}$, $\overline{DE}$. »

En effet, soit R le point d'intersection des tangentes à la courbe $\overparen{BDCE}$ aux points B, C, et soit T celui des tangentes à la même courbe aux points D, E. La droite $\overline{RT}$ est rencontrée par les deux droites $\overline{BC}$, $\overline{DE}$ en des points O, K tels qu'on a $\overline{AC} : \overline{AB} :: \overline{OC} : \overline{OB}$, $\overline{AE} : \overline{AD} :: \overline{KE} : \overline{KD}$ (Correspondance, tome III, page 11); si par le point A l'on mène une droite quelconque qui coupe la courbe $\overparen{BMCN}$ aux points β, γ, la courbe $\overparen{DMEN}$ aux points δ, ε, et la droite $\overline{RT}$ au point ω, l'on aura $\overline{A\gamma} : \overline{A\beta} :: \overline{\omega\gamma} : \overline{\omega\beta}$, $\overline{A\varepsilon} : \overline{A\delta} :: \overline{\omega\varepsilon} : \overline{\omega\delta}$ (Correspondance, tome III, page 11).

D'après cela, si nous menons une droite par les points N et A, et qu'elle rencontre les deux courbes $\overparen{BMCN}$, $\overparen{DMEN}$ aux

points M', M'' respectivement, et la droite $\overline{RT}$ en H, l'on aura $\overline{AN} : \overline{AM'} :: \overline{HN} : \overline{HM'}$, $\overline{AN} : \overline{AM''} :: \overline{HN} : \overline{HM''}$; donc $\overline{AM'} : \overline{AM''} :: \overline{HM'} : \overline{HM''}$; or il est facile de voir que les points M', M'' sont d'un même côté de la droite $\overline{RT}$; par conséquent il faut, pour que la dernière proportion ait lieu, que les deux points M', M'' se confondent en un seul, qui est le point M; ainsi la droite $\overline{MN}$ passe par le point A. Il en est de même de $\overline{PQ}$.

(10) « Lorsque deux surfaces quelconques du second degré » sont circonscrites à une même troisième surface du second » degré, elles se coupent toujours dans le système de deux » courbes planes, dont les plans passent par la même droite que » ceux des deux courbes de contact des deux premières surfaces » avec la troisième. » (*)

En effet, tout plan qui coupera les deux courbes de contact déterminera dans les surfaces trois courbes dont les deux premières toucheront la troisième, chacune en deux points, et par conséquent se couperont en quatre points qui seront deux à deux en ligne droite avec le point où le même plan rencontre la droite d'intersection L des plans deux des courbes de contact (9); donc chacune des courbes d'intersection des deux premières surfaces est telle que la droite qui joint deux quelconques de ses points rencontre la droite L; donc cette courbe est plane et son plan passe par la droite L; donc, etc.

La droite L est parallèle à la droite diamétrale conjuguée commune moyenne des deux surfaces circonscrites à la troisième (6).

Le théorème précédent n'est qu'un cas particulier de celui-ci :

(11) « Lorsque deux surfaces du second degré coupent une » même troisième surface du second degré, chacune suivant deux » courbes planes, et que les plans de ces quatre courbes passent » tous les quatre par une même droite L, les deux premières » surfaces se coupent suivant deux courbes planes dont les plans » passent par la même droite L. »

Pour donner la démonstration de ce théorème, je me servirai du lemme suivant :

(12) *Lemme.* « Si, par un point A (*fig.* 2) pris dans le plan d'une » section conique, on mène quatre droites $\overline{BC}$, $\overline{B'C'}$, $\overline{DE}$, $\overline{D'E'}$, » qui la coupent aux points B, C; B', C'; D, E; D', E'; » que l'on fasse passer deux courbes du second degré, l'une

(*) C'est ce théorème qu'on a démontré pour un cas particulier, page 299 de ce cahier.

» par les quatre premiers points, et la seconde par les quatre » autres, ces deux courbes se couperont en quatre points M, » N, P, Q, tels que les droites $\overline{MN}$, $\overline{PQ}$ passeront par le » point A. »

En effet, les quatre points $O \mp \overline{BC'}.\overline{B'C}$, $R \mp \overline{BB'}.\overline{CC'}$, $K \mp \overline{DE'}.\overline{D'E}$, et $T \mp \overline{DD'}.\overline{EE'}$ seront sur une même droite $\overline{TO}$ (Correspondance, tome III, page 11). Si, par le point N et le point A, l'on mène une droite, elle rencontrera les courbes $\frown{BB'CC'}$, $\frown{DD'EE'}$ en deux points M', M'' respectivement, et la droite $\overline{TO}$ en un point H, et l'on aura $\overline{AN} : \overline{AM'} :: \overline{HN} : \overline{HM'}$, $\overline{AN} : \overline{AM''} :: \overline{HN} : \overline{HM''}$; d'où $\overline{AM'} : \overline{HM'} :: \overline{AM''} : \overline{HM''}$; mais les points M', M'' se trouvent toujours d'un même côté de la droite $\overline{TO}$; il faut donc, à cause de la proportion précédente, qu'ils se confondent en un seul, qui est le point M. On verrait de même que $\overline{PQ}$ passe par le point A; *ce qu'il fallait démontrer.*

(13) Pour déduire de cette proposition la démonstration du théorème, menons un plan quelconque qui coupe les quatre courbes d'intersection des deux premières surfaces avec la troisième; il rencontrera la droite L en un point A, et déterminera dans les surfaces trois courbes telles que les points d'intersection des deux premières avec la troisième, seront deux à deux en ligne droite avec le point A; donc les points d'intersection de ces deux premières courbes seront aussi deux à deux en ligne droite avec le même point A (art. 12, lemme), et cela aura lieu quelle que soit la position du plan coupant; donc l'intersection des deux premières surfaces est composée de deux courbes planes dont les plans passent par la droite L. Donc, etc.

J'ai démontré (Correspondance, tome III, page 11 et suiv.) les derniers articles du Mémoire de M. Monge; je me dispenserai de les rapporter ici; je ferai simplement observer qu'il existe une surface dans laquelle on trouve deux droites qui jouissent de propriétés réciproques, semblables à celles dont il est question dans l'article IX de ce Mémoire. C'est la surface enveloppe de l'espace parcouru par une surface du second degré semblable, semblablement placée et tangente à trois autres surfaces du second degré.

Propriétés de la surface enveloppe de l'espace parcouru par une surface semblable, semblablement placée et tangente à trois autres surfaces du second degré, semblables entr'elles et semblablement placées,

La surface (E) qui enveloppe les surfaces (Σ), (Σ'), etc., semblables, semblablement placées et tangentes aux trois autres (Ω), (Ω'), (Ω'') du second degré (*), peut être engendrée d'une seconde manière par une surface mobile (Ω) tangente à trois des surfaces (Σ), (Σ'), etc.

Les centres de similitude directe des surfaces (Ω), (Ω'), etc., combinées deux à deux, sont sur une même droite L, et ceux des surfaces (Σ), (Σ'), etc. sont sur une droite λ.

Les caractéristiques de la surface (E), considérée comme enveloppe de la surface mobile (Σ), sont des courbes du second degré, dont les plans passent tous par la droite L.

Par deux de ces courbes on peut mener une surface semblable et semblablement placée à (Ω), (Ω'), etc.; et un cône ayant son sommet sur la droite λ; deux cônes ainsi déterminés se coupent suivant deux courbes du second degré dont les plans passent par la droite L.

Par une seule de ces courbes on peut mener un cône tangent à la surface enveloppe, son sommet est sur la droite λ; deux de ces cônes tangens se coupent suivant deux courbes du second degré dont les plans passent par la droite L.

Pareillement :

Les caractéristiques de la surface (E) considérée comme enveloppe de l'espace parcouru par la surface mobile (Ω), sont des courbes du second degré, leurs plans passent tous par la droite λ.

Par deux de ces courbes on peut faire passer une surface semblable et semblablement placée à (Ω), etc., et un cône ayant son sommet sur la droite L; deux cônes ainsi déterminés se coupent suivant deux courbes du second degré dont les plans passent par la droite λ.

Par une seule de ces caractéristiques on peut mener un cône tangent à la surface enveloppe, son sommet est sur la droite L,

(*) Je suppose que la surface (Σ), qui en général peut toucher les trois surfaces (Ω), (Ω'), (Ω'') de huit manières différentes, n'en enveloppe aucune, ou les enveloppe toutes trois.

deux de ces cônes tangens se coupent suivant deux courbes planes dont les plans passent par la droite λ.

Ainsi, dans la surface enveloppe que nous considérons, les deux droites L, λ jouissent, l'une par rapport à l'autre, de propriétés qui sont réciproques, comme dans les surfaces du second degré.

Enfin par la courbe du second degré lieu des centres des surfaces (Ω), (Ω'), etc., et celle qu'on obtient dans la surface (E) par un plan passant par la droite L, on peut mener un cône dont le sommet est sur la courbe lieu des centres des surfaces (Ξ), (Ξ'), etc., et, par cette courbe et celle que détermine dans la surface enveloppe tout plan passant par λ, on peut mener un cône dont le sommet engendre la courbe des centres de (Ω), (Ω'), etc.

Quand les surfaces (Ω), (Ω'), etc. sont des sphères, les caractéristiques de la surface enveloppe (E) sont des cercles, et sont en même tems les lignes de courbures de cette surface. (Analyse appliquée à la Géométrie, par Monge, p. 328.)

On peut tirer d'autres conséquences de ce cas particulier. (*Voyez* la Correspondance, tome II, p. 423).

ASTRONOMIE ET GÉODÉSIE.

Sur la détermination de la distance apparente des astres sujets à la parallaxe; par M. Puissant, *Officier supérieur, chef des études à l'Ecole des Ingénieurs-Géographes.*

Le calcul des éclipses de Soleil, ou des passages des planètes sur son disque, est fondé sur celui de la distance angulaire apparente de ces astres. Cette distance, considérée au même instant physique, n'est pas la même, à cause des parallaxes, pour tous les points de la Terre qui voient l'éclipse. En effet, le commencement ou la fin de ce phénomène ayant lieu pour un point particulier de la Terre, lorsque les disques des deux astres paraissent en contact, il arrive en général que ces disques, relativement à tout autre point, ne s'atteignent pas encore, ou que l'un anticipe sur l'autre. Il résulte de là que le problème des longitudes géographiques, par les éclipses de cette espèce, est un des plus compliqués de l'Astronomie-pratique.

M. Lagrange a publié sur cette matière deux Mémoires très-

intéressans; l'un dans les volumes de l'Académie de Berlin (année 1766); l'autre dans les Éphémérides de cette ville, pour l'année 1782 : ce second Mémoire vient d'être reproduit dans la *Connaissance des Tems* pour 1817. La méthode que cet illustre géomètre expose dans celui-ci, étant considérée analytiquement, ne laisse sans doute rien à desirer; mais, sous le rapport de la pratique, elle n'a pu obtenir l'assentiment unánime des astronomes, qui préfèrent toujours leurs méthodes habituelles, parce qu'elles sont aussi exactes et d'un usage bien plus facile.

Ayant eu occasion de traiter le même sujet, dans mon Cours de Géodésie à l'Ecole d'application des Ingénieurs-Géographes, j'ai remarqué que cette méthode de M. Lagrange était non-seulement susceptible d'offrir les mêmes avantages que les autres, et de mériter en outre la préférence pour les éclipses de Soleil, en y faisant les modifications convenables; mais encore de procurer, avec la plus grande facilité, toutes les formules de parallaxes dont ce géomètre n'a pas parlé. C'est ce que je me propose de faire voir ici, à l'aide des considérations les plus simples de la Géométrie analytique, mais le plus rapidement possible.

1. Rapportons les points de l'espace à trois axes rectangles; prenons pour origine des coordonnées le centre de la Terre; pour axe des x celui qui passe par l'équinoxe du printems; pour axe des y la droite située dans l'écliptique et passant par le point du Cancer; enfin pour axe des z la droite passant par le pôle boréal de l'écliptique.

Soient en outre x, y, z les coordonnées rectangles du centre d'un astre situé dans l'hémisphère boréal, r sa distance au centre de la Terre, a la longitude de cet astre ou l'angle que la projection du rayon r fait avec l'axe des x, b sa latitude ou l'inclinaison du même rayon sur l'écliptique. On aura, comme l'on sait,

$$x = r\cos a\cos b,\quad y = r\sin a\cos b,\quad z = r\sin b. \qquad (1)$$

Soient pareillement ξ, η, ζ les coordonnées rectangles du point où se trouve un observateur sur la surface de la Terre, et g, h la longitude et la latitude du zénit vrai, c'est-à-dire du zénit déterminé par le prolongement du rayon ϱ de la Terre, mené par le lieu d'observation. On aura de même

$$\xi = \varrho\cos g\cos h,\quad \eta = \varrho\sin g\cos h,\quad \zeta = \varrho\sin h. \qquad (2)$$

Enfin prenons le lieu de l'observateur pour l'origine commune de trois autres axes rectangulaires, respectivement parallèles aux primitifs; puis désignons par r' la distance de l'observateur à l'astre, et par a', b' les latitude et longitude apparentes de cet astre. On aura

$$x' = r'\cos a'\cos b',\quad y' = r'\sin a'\cos b',\quad z' = r'\sin b'. \qquad (3)$$

Or il existera évidemment, entre les coordonnées du lieu vrai et du lieu apparent de l'astre, les relations suivantes :

$$x' = x - \xi, \qquad y' = y - \eta, \qquad z' = z - \zeta, \quad (4)$$

ou bien, en ayant égard à celles (1) (2) (3),

$$\left.\begin{aligned} r'\cos a'\cos b' &= r\cos a\cos b - \varrho\cos g\cos h \\ r'\sin a'\cos b' &= r\sin a\cos b - \varrho\sin g\cos h \\ r'\sin b' &= r\sin b - \varrho\sin h \end{aligned}\right\}; \quad (5)$$

si donc l'on divise successivement la seconde et la troisième équation par la première, et qu'on fasse $\frac{\varrho}{r} = \sin\varpi$, ϖ étant alors la plus grande parallaxe de hauteur, on aura

$$\left.\begin{aligned} \text{tang}\, a' &= \frac{\sin a\cos b - \sin\varpi\sin g\cos h}{\cos a\cos b - \sin\varpi\cos g\cos h} \\ \text{tang}\, b' &= \frac{\cos a'(\sin b - \sin\varpi\sin h)}{\cos a\cos b - \sin\varpi\cos g\cos h} \end{aligned}\right\}. \quad (6)$$

Ces formules donnent le lieu apparent en fonction du lieu vrai et de la plus grande parallaxe de hauteur, qu'on nomme ordinairement *parallaxe horizontale*. Il est plus simple dans la pratique, d'évaluer les parallaxes de longitude et de latitude par le lieu vrai, pour en déduire ensuite le lieu apparent. La première parallaxe est $(a'-a)$, et la seconde $(b'-b)$. Voici un moyen très-direct pour les obtenir.

Formules de parallaxes.

2. La première équation (6) ayant lieu quelle que soit l'origine des longitudes, on peut retrancher de chacune d'elles la même quantité, l'arc a, par exemple; ce qui revient évidemment à changer la direction des axes x, y, en les laissant toutefois dans leur plan primitif. D'après cette remarque, on a sur-le-champ

$$\text{tang}(a'-a) = \frac{\sin\varpi\sin(a-g)\cos h}{\cos b - \sin\varpi\cos(a-g)\cos h}; \quad (7)$$

mais la différence $a'-a$ étant toujours très-petite, même pour la Lune, on pourra réduire cette expression en série, et n'en conserver que les termes les plus sensibles; on aura alors, en secondes de degré,

$$a'-a = \frac{\sin\varpi\cos h}{\cos b}\frac{\sin(a-g)}{\sin 1''} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\varpi\cos h}{\cos b}\right)^2\frac{\sin 2(a-g)}{\sin 1''} + \ldots \quad (7')$$

Par un raisonnement analogue au précédent, les équations (6) se changent de suite en celles-ci :

$$\text{tang}\,(a'-g)=\frac{\sin(a-g)\cos b}{\cos(a-g)\cos b-\sin\pi\cos h},$$

$$\text{tang}\,b'=\frac{\cos(a'-g)\,(\sin b-\sin\pi\sin h)}{\cos(a-g)\cos b-\sin\pi\cos h};$$

ensorte qu'en les divisant l'une par l'autre on a

$$\text{tang}\,b'=\frac{\sin(a'-g)}{\sin(a-g)}\left(\text{tang}\,b-\frac{\sin\pi\sin h}{\cos b}\right),$$

ou bien introduisant les distances polaires vraie et apparente, c'est-à-dire faisant $b=90^\circ-\Delta$, $b'=90^\circ-\Delta'$, il vient

$$\cot\Delta'=\frac{\sin(a'-g)}{\sin(a-g)}\left(\cot\Delta-\frac{\sin\pi\sin h}{\sin\Delta}\right).$$

Pour tirer de cette formule la valeur de la parallaxe de latitude ou plutôt de distance polaire, savoir, $\Delta'-\Delta=\sigma$, on remarquera que l'on a d'abord

$$\cot\Delta-\cot\Delta'=\cot\Delta-\frac{\sin(a'-g)}{\sin(a-g)}\left(\cot\Delta-\frac{\sin\pi\sin h}{\sin\Delta}\right),$$

et par suite

$$\frac{\sin(\Delta'-\Delta)}{\sin\Delta\sin(\Delta+\sigma)}=\cot\Delta\left(1-\frac{\sin(a'-g)}{\sin(a-g)}\right)+\frac{\sin(a'-g)}{\sin(a-g)}\,\frac{\sin\pi\sin h}{\sin\Delta};$$

enfin

$$\frac{\sin\sigma}{\sin(\Delta+\sigma)}=\frac{\sin(a'-g)\sin\pi\sin h}{\sin(a-g)}-\frac{2\cos\Delta\cos\left(\frac{a+a'}{2}-g\right)\sin\left(\frac{a'-a}{2}\right)}{\sin(a-g)}.$$

La parallaxe σ ne serait pas assez facile à évaluer au moyen de cette équation ; mais le calcul par les logarithmes s'effectuera commodément, à l'aide des transformations suivantes.

Faisant le premier terme du second membre $=\text{tang}\,x$, et le deuxième terme $=\text{tang}\,y$; on aura

$$\sin\sigma=(\text{tang}\,x-\text{tang}\,y)\sin(\Delta+\sigma);$$

puis développant et divisant par $\cos\sigma$, il viendra

$$\text{tang}\,\sigma=\frac{(\text{tang}\,x-\text{tang}\,y)\sin\Delta}{1-(\text{tang}\,x-\text{tang}\,y)\cos\Delta}=\frac{\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}\sin\Delta}{1-\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}\cos\Delta}; \qquad (8)$$

et par suite on aura cette série

$$\sigma = \frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}\frac{\sin\Delta}{\sin 1''} + \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(x-y)}{\cos x \cos y}\right)^2 \frac{\sin 2\Delta}{\sin 1''} + \ldots\ldots \quad (8')$$

Telle est la valeur de la parallaxe de distance polaire. Cette valeur et la précédente (7') sont dues à M. Delambre.

On observera que les formules des parallaxes d'ascension droite et de déclinaison se déduisent sur-le-champ des formules ci-dessus, en y changeant seulement les longitudes en ascensions droites, et les latitudes en déclinaisons, ce qui revient à prendre l'équateur pour le plan des $x\,y$. On trouve avec la même facilité les diverses expressions de la parallaxe de hauteur et celles de la parallaxe annuelle : c'est sur quoi il est par conséquent inutile d'insister.

3. Dans la pratique, on ne connaît *à priori* ni la longitude g, ni la latitude h du zénit ; mais on déduit ces deux coordonnées circulaires de l'ascension droite de ce point et de sa déclinaison, qui sont données immédiatement par l'observation. En effet, l'ascension droite du zénit θ est le tems sidéral de l'observation réduit en degrés, à raison de 1 heure pour 15°, lequel est égal à l'ascension droite moyenne du Soleil, plus au tems moyen ; et la déclinaison du zénit φ est égale à la latitude géographique, moins l'angle de la verticale avec le rayon. Or par les principes de la Trigonométrie sphérique on a, en désignant par ω l'obliquité de l'écliptique,

$$\left.\begin{array}{l} \tang g = \cos\omega \tang\theta + \dfrac{\sin\omega \tang\varphi}{\cos\theta}, \quad \cos h = \dfrac{\cos\theta\cos\varphi}{\cos g}, \\ \text{ou} \qquad \sin h = \sin\varphi\cos\omega - \cos\varphi\sin\omega\sin\theta \end{array}\right\}. \quad (9)$$

Il suffit, dans la pratique, de faire usage des Tables de logarithmes à 5 décimales, pour calculer, soit le *nonagésime* g et le complément h de sa hauteur, soit les parallaxes précédentes.

4. Quand les latitudes et longitudes apparentes de deux astres sont connues, on détermine en général leur distance apparente par la formule qui donne le côté d'un triangle sphérique quelconque en fonction des deux autres côtés et de l'angle qu'ils comprennent. Soient, par exemple, a', b' les coordonnées circulaires du lieu apparent d'un astre P, et A', B' celles d'un autre astre Q : il est évident que l'on aura, en dénotant par D' la distance apparente cherchée,

$$\cos D' = \sin a' \sin A' + \cos a' \cos A' \cos(b' - B'),$$

ou bien, à cause de $\cos m = 1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} m$, il viendra

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} D' = \sin^2 \tfrac{1}{2}(a' - A') + \cos a' \cos A' \sin^2 \tfrac{1}{2}(b' - B'),$$

formule qui a lieu quelle que soit la grandeur de D' ; mais comme dans le cas des éclipses de Soleil ou des passages des planètes sur cet astre, la distance apparente D' est très-petite, et que de plus la latitude du Soleil est nulle, on conçoit qu'en pareille circonstance la formule précédente est plus facile à évaluer numériquement. Cependant notre but étant d'expliquer et de simplifier la méthode que M. Lagrange a proposée à cet effet, nous ne nous étendrons pas davantage sur cette solution trigonométrique.

Détermination de la distance apparente de deux astres, aux approches ou pendant la durée d'une éclipse.

5. Choisissons un nouveau système d'axes rectangulaires $x''y''z''$, ayant toujours pour origine le centre de la Terre ; mais supposons l'axe des x'' dirigé vers un point arbitraire C de la sphère céleste, dont la latitude et la longitude vraies soient α, β ; puis dénotant par XYZ les angles que cet axe x'' fait avec ceux des xyz primitifs ; par $X'Y'Z'$ les angles analogues, relativement à l'axe des y'' ; enfin par $X''Y''Z''$ les angles qui déterminent de même la direction de l'axe des z''. Cela posé, si $x_{''}y_{''}z_{''}$ sont dans ce nouveau système d'axes, les coordonnées d'un point quelconque de l'espace, et que $x'y'z'$ soient celles du même point, par rapport au système primitif, on aura visiblement, par la théorie des projections,

$$x_{''} = x'\cos X + y'\cos Y + z'\cos Z,$$
$$y_{''} = x'\cos X' + y'\cos Y' + z'\cos Z',$$
$$z_{''} = x'\cos X'' + y'\cos Y'' + z'\cos Z'';$$

mais les arcs X, α, β forment nécessairement un triangle sphérique rectangle dont X est l'hypoténuse; de même les arcs Y, $90°-\alpha$, β sont les côtés d'un autre triangle sphérique rectangle, et ainsi de suite; on a donc, en vertu de la propriété de ce triangle, et en supposant l'axe des y'' dans le plan de l'écliptique,

$$\cos X = \cos\alpha\cos\beta, \quad \cos Y = \sin\alpha\cos\beta, \quad \cos Z = \sin\beta,$$
$$\cos X' = -\sin\alpha, \quad \cos Y' = \cos\alpha, \quad \cos Z' = 0,$$
$$\cos X'' = -\cos\alpha\sin\beta, \quad \cos Y'' = -\sin\alpha\sin\beta, \quad \cos Z'' = \cos\beta,$$

auquel cas le plan des $x''z''$ est celui du cercle de latitude du point C.

De là et des relations (3) l'on conclut

$$(a)\begin{cases} x_{''} = r'\cos a'\cos b'\cos\alpha\cos\beta + r'\sin a'\cos b'\sin\alpha\cos\beta + r'\sin b'\sin\beta, \\ y_{''} = -r'\cos a'\cos b'\sin\alpha + r'\sin a'\cos b'\cos\alpha, \\ z_{''} = -r'\cos a'\cos b'\cos\alpha\sin\beta - r'\sin a'\cos b'\sin\alpha\sin\beta + r'\sin b'\cos\beta. \end{cases}$$

Or, en menant, par l'origine des coordonnées, une droite égale et parallèle au rayon vecteur apparent r' d'un astre A, les équations de ce rayon vecteur seront en général

$$y_{\prime\prime} = p'x_{\prime\prime}, \qquad z_{\prime\prime} = q'x_{\prime\prime};$$

celles du rayon vecteur apparent R' de l'astre B seront de même

$$y_{\prime\prime\prime} = P'x_{\prime\prime\prime}, \qquad z_{\prime\prime\prime} = Q'x_{\prime\prime\prime};$$

ainsi la tangente trigonométrique de l'angle Σ' de ces deux rayons ou de la distance angulaire apparente des centres des astres, sera, comme l'on sait

$$(M) \qquad \operatorname{tang}\Sigma' = \frac{\sqrt{(P'-p')^2+(Q'-q')^2+(P'q'-Q'p')^2}}{1+P'p'+Q'q'},$$

expression dans laquelle il ne s'agirait plus que de remplacer $P'Q'p'q'$ par leurs valeurs, si elle n'était d'ailleurs susceptible d'être considérablement simplifiée. Mais voyons auparavant quelles sont en général ces valeurs de $P'Q'p'q'$.

D'abord on a $p' = \dfrac{y_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime}}$ et $q' = \dfrac{z_{\prime\prime}}{x_{\prime\prime}}$, et partant, à cause des relations (a),

$$p' = \frac{\sin\alpha - \cos\alpha \operatorname{tang} a'}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta\operatorname{tang} a' + \sin\beta\,\dfrac{\operatorname{tang} b'}{\cos a'}},$$

$$q' = \frac{-\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\sin\beta\operatorname{tang} a' + \cos\beta\,\dfrac{\operatorname{tang} b'}{\cos a'}}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\cos\beta\operatorname{tang} a' + \sin\beta\,\dfrac{\operatorname{tang} b'}{\cos a'}};$$

mettant en outre, au lieu de $\operatorname{tang} a'$ et $\dfrac{\operatorname{tang} b'}{\cos a'}$ leurs valeurs (5), et faisant, pour abréger,

$$(b)\begin{cases} l = \cos(a-\alpha)\cos b\cos\beta + \sin b\sin\beta \\ m = \sin(a-\alpha)\cos b \\ n = \sin b\cos\beta - \cos(a-\alpha)\cos b\sin\beta, \end{cases}$$

$$(c)\begin{cases} \lambda = \cos(g-\alpha)\cos h\cos\beta + \sin h\sin\beta \\ \mu = \sin(g-\alpha)\cos h \\ \nu = \sin h\cos\beta - \cos(g-\alpha)\cos h\sin\beta, \end{cases}$$

auquel cas l, m, n et λ, μ, ν sont les cosinus des angles que le rayon vecteur r et le rayon de la Terre ϱ font avec les axes $x_{\prime}y_{\prime}z_{\prime}$,

comme il est facile de s'en assurer ; on aura définitivement pour l'astre A, et après avoir fait $\sin \varpi = \psi$ pour simplifier,

$$p' = \frac{m - \mu\psi}{l - \lambda\psi}, \qquad q' = \frac{n - \nu\psi}{l - \lambda\psi}:$$

résultats que l'on obtient tout d'abord, en faisant attention que $rl - \rho\lambda$, $rm - \rho\mu$, $rn - \rho\nu$ sont les projections orthogonales du rayon vecteur apparent r' sur les mêmes axes des coordonnées.

Pareillement, si A, B sont les coordonnées de la position vraie de l'astre B, et qu'on désigne par L, M, N ce que deviennent les relations (b) lorsqu'on y change a en A et b en B; on aura, relativement à ce second astre,

$$P' = \frac{M - \mu\Psi}{L - \lambda\Psi}, \quad Q' = \frac{N - \nu\Psi}{L - \lambda\Psi},$$

Ψ étant le sinus de la parallaxe horizontale Π.

On remarquera que les deux systèmes d'équations (b), (c) satisfont aux relations suivantes :

$$(d) \left\{ \begin{array}{l} l^2 + m^2 + n^2 = 1, \quad \lambda^2 + \mu^2 + \nu^2 = 1, \\ l\lambda + m\mu + n\nu = \cos(r, \rho) = \cos(g - a)\cos b \cos h + \sin b \sin h, \end{array} \right.$$

et que la méthode analytique actuelle signifie en Géométrie, que les lieux apparens des astres sont projetés perspectivement du centre de la sphère céleste, sur un plan qui la touche au point C.

6. On peut être curieux de trouver l'angle V' que le plan du grand cercle, passant par les projections des lieux apparens sur le plan tangent, fait avec le cercle de latitude $x''z''$ du point de contact C : or cela est très-facile ; car soit en général

$$A_1 x_{\prime\prime} + B_1 y_{\prime\prime} + C_1 z_{\prime\prime} = 0,$$

l'équation du plan de ce grand cercle ; les coordonnées des deux projections dont il s'agit étant visiblement, en prenant le rayon de la sphère céleste pour unité,

$$\begin{array}{l} 1,\ p',\ q', \\ 1,\ P',\ Q', \end{array}$$

on aura $A_1 = q'P' - Q'p'$, $B_1 = Q' - q'$, $C_1 = p' - P'$; et comme en général

$$\cos V' = \frac{B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}},$$

il viendra, par substitution,

$$\text{séc}\, V' = \frac{\sqrt{(q'P' - Q'p')^2 + (Q' - q')^2 + (P' - p')^2}}{Q' - q'}.$$

Supposons maintenant que les projections des deux lieux apparens et le point C soient en ligne droite; on aura alors $q'P' = Q'p'$, et de l'expression précédente on tirera

$$\text{tang}\, V' = \frac{P'-p'}{Q'-q'}.$$

M. Lagrange, en donnant cette valeur particulière de tang V' pour le cas général, a évidemment commis une inadvertance; et la remarque faite à ce sujet, au bas de la page 247 (*Connaiss. des Tems*, année 1817), ne nous paraît pas tout-à-fait exacte.

7. Toutes les formules de l'art. 5 sont de la plus grande généralité; mais il en est quelques-unes qui se simplifient, lorsque l'astre A, par exemple, est dans la direction de l'axe des x'', ou en C. En effet, on a dans ce cas $\alpha = a$, $\beta = b$, et par suite $l = 1$, $m = 0$, $n = 0$; enfin

$$p' = \frac{-\mu\psi}{1-\lambda\psi}, \qquad q' = \frac{-\nu\psi}{1-\lambda\psi};$$

ces deux dernières valeurs sont donc l'effet de la parallaxe de l'astre A placé en C.

Supposons, au contraire, que l'axe des x'' passe par le centre du Soleil B; on aura $\alpha = A$, $\beta = B = 0$, et par conséquent $L = 1$, $M = 0$, $N = 0$. Quant aux équations (b) (c), elles deviennent

$$(b')\left\{\begin{aligned} l &= \cos(a-A)\cos b, \\ m &= \sin(a-A)\cos b, \\ n &= \sin b, \end{aligned}\right. \qquad (c')\left\{\begin{aligned} \lambda &= \cos(g-A)\cos h, \\ \mu &= \sin(g-A)\cos h, \\ \nu &= \sin h. \end{aligned}\right.$$

8. Malgré ces simplifications, la formule (M) serait encore beaucoup trop compliquée pour la pratique; mais il est aisé de prouver d'abord que, relativement aux éclipses de Soleil, cette formule peut être réduite à celle-ci :

$$(M') \qquad \text{tang}\, \Sigma' = \sqrt{(p'-P')^2 + (q'-Q')^2},$$

sans qu'il en résulte une erreur d'un dixième de seconde. Soit dans cette vue,

$$\sqrt{(p'-P')^2 + (q'-Q')^2} = \text{tang}\, \sigma,$$
$$\frac{Q'(p'-P') - P'(q'-Q')}{P'(p'-P') + Q'(q'-Q')} = \text{tang}\, s;$$

on aura pour le Soleil

$$\sqrt{P'^2 + Q'^2} = \frac{\Psi\sqrt{1-\lambda^2}}{1-\lambda\Psi} = f,$$

et par suite

$$\tang \Sigma' = \frac{\tang \sigma (1 + f^2 \sin^2 s)^{\frac{1}{2}}}{1 + f \cos s \tang \sigma + f^2}.$$

M. Lagrange cherche, par un procédé très-élégant, la différence $\Sigma' - \sigma$ en série convergente, où la valeur du premier terme, dans les cas extrêmes, est moindre que $\frac{1}{10}$ de seconde. Pour parvenir à cette conclusion par une voie plus élémentaire et plus courte, prenons le logarithme de chaque membre de l'équation précédente, et développons; il viendra une série de la forme

$$\log \tang \Sigma' = \log \tang \sigma - Kf \cos s \tang \sigma + Kf^2 R - Kf^3 S \ldots,$$

dans laquelle $K = 0,434294$ est le module des Tables. Or le terme $Kf \cos s \tang \sigma$, qui est le plus considérable de la série, acquiert la plus grande valeur lorsque $\cos s = 1$: soit donc $\sigma = 5^\circ$; dans ce cas la quantité f ne pouvant surpasser tang $8'',5$, puisque pour le soleil $\Pi = 8'',5$ à très-peu près, on aura

$$Kf \tang \sigma = 0,0000016,$$

c'est-à-dire que le log tang σ devrait être diminué de 0,0000016. Mais par hypothèse, $\tang \sigma = \tang 5^\circ$; d'où $\log \tang \sigma = 8,9419518$; ainsi $\log \tang \Sigma'$ ne différant de $\log \tang \sigma$ que de 0,0000016, il s'ensuit que $\Sigma' = \sigma - 0'',06$. Il est donc prouvé que dans les éclipses de Soleil, et à plus forte raison dans les passages de Vénus et de Mercure sur cet astre, on peut toujours faire $\tang \Sigma' = \tang \sigma$, sans craindre de jamais commettre une erreur de $\frac{1}{10}$ de seconde de degré.

Enfin le même géomètre démontre que l'expression (M'), quoique déjà fort réduite, peut cependant l'être davantage. (Voyez la *Connaissance des Tems* pour 1817, pag. 256.) En effet, d'après ce qui précède on a, par rapport au soleil,

$$p' - P' = \frac{m - \mu\psi}{l - \lambda\psi} - \frac{\mu\Psi}{1 - \lambda\Psi}$$

$$= \frac{m - \mu\psi - \mu\Psi(l - \lambda\psi)(1 - \lambda\Psi)^{-1}}{l - \lambda\psi}$$

$$= \frac{m - \mu(\psi - l\Psi)}{l - \lambda\psi},$$

en négligeant les termes du second ordre comme étant extrêmement petits. Pareillement

$$q' - Q' = \frac{n - \nu\psi}{l - \lambda\psi} - \frac{\nu\Psi}{1 - \lambda\Psi}$$
$$= \frac{n - \nu(\psi - l\Psi)}{l - \lambda\psi};$$

mais l différant toujours très-peu de l'unité, on peut supposer, dans le terme $l\Psi$, que $l = 1$; ainsi on a simplement

$$p' - P' = \frac{m - \mu(\psi - \Psi)}{l - \lambda\psi}, \quad q' - Q' = \frac{n - \nu(\psi - \Psi)}{l - \lambda\psi};$$

partant, l'équation (M') devient

$$(N) \quad \tang \Sigma' = \frac{\sqrt{[\overline{m - \mu(\psi - \Psi)}^2 + \overline{n - \nu(\psi - \Psi)}^2]}}{l - \lambda\psi},$$

laquelle donne la distance apparente des centres, avec une précision toujours très-suffisante, soit dans les éclipses de Soleil ou les passages des planètes sur son disque, soit dans les occultations des étoiles par la Lune. Dans ce dernier cas, l'on doit diriger l'axe des x'' par l'étoile ou par le centre de la planète occultée, et alors on a $\alpha = A$, $\beta = B$; faisant donc $a - A = t$, $b - B = u$, les relations (b) (c) prendront la forme suivante, comme il est facile de s'en assurer,

$$(b'') \begin{cases} l = \cos u - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} t \cos B \cos b \\ m = \sin t \cos b \\ n = \sin u + 2\sin^2 \tfrac{1}{2} t \sin B \cos b \end{cases}$$

$$(c'') \begin{cases} \lambda = \cos(g - A) \cos B \cos h + \sin B \sin h \\ \mu = \sin(g - A) \cos h \\ \nu = \cos B \sin h - \cos(g - A) \sin B \cos h, \end{cases}$$

et l'on aura en outre $\Pi = 0$, s'il s'agit des étoiles.

9. Au commencement et à la fin d'une éclipse, les disques des astres paraissent en contact, et alors la distance apparente des centres est égale à la somme des demi-diamètres apparens. Ces diamètres apparens variant en général à différentes hauteurs des astres sur l'horizon, la somme dont il s'agit ne peut être rigoureusement la même que celle qui est déduite des Tables astronomiques; mais la variation des diamètres apparens n'étant réellement sensible que pour la Lune, qui est l'astre le plus près de la Terre, on se borne à évaluer l'*augmentation de son diamètre.* Or si d est le demi-diamètre horizontal de la Lune, donné par les Tables, et d' son demi-diamètre apparent dans un instant quelconque; si, de plus, r et r' sont respectivement

les distances du centre de cet astre au centre de la Terre et au lieu de l'observateur, on aura évidemment

$$\sin d' = \frac{r}{r'} \sin d.$$

Reste à trouver l'expression du rapport $\frac{r}{r'}$. D'abord si on élève au carré chacune des équations (5), et qu'on fasse une somme des résultats, on aura

$$r'^2 = r^2 - 2\rho\,[\cos(g-a)\cos b\cos h + \sin b\sin h] + \rho^2,$$

ou, en vertu de la 3ᵉ relation (d), et à cause de $\frac{\rho}{r} = \sin\varpi = \psi$,

$$\frac{r'^2}{r^2} = 1 - 2\psi\,(l\lambda + m\mu + n\nu) + \psi^2.$$

Si ensuite on néglige dans la formule (N) les très-petits termes $\mu\psi$ et $\nu\psi$, ce qui est permis dans cette circonstance, et qu'on ait égard aux relations citées, il viendra, après avoir développé,

$$\begin{aligned}(l-\lambda\psi)\tang\Sigma' &= \sqrt{(\overline{m-\mu\psi}^2 + \overline{n-\nu\psi}^2)}\\ &= \sqrt{(1-l^2) + \psi^2(1-\lambda^2) - 2\psi(m\mu+n\nu)},\end{aligned}$$

d'où l'on tire aisément

$$(l-\lambda\psi)^2\tang^2\Sigma' + (l-\lambda\psi)^2 = 1 - 2\psi(l\lambda + m\mu + n\nu) + \psi^2;$$

ainsi

$$\frac{r'}{r} = (l-\lambda\psi)\,\text{séc}\,\Sigma' = \frac{(l-\lambda\psi)}{\cos\Sigma'};$$

enfin

$$\sin d' = \frac{\sin d\cos\Sigma'}{l-\lambda\psi}.$$

Cela posé, soit D le demi-diamètre horizontal du Soleil, donné par les Tables astronomiques; on aura, au commencement comme à la fin de l'éclipse,

$$\Sigma' = d' + D, \quad \text{ou} \quad \sin d' = \sin\Sigma'\cos D - \cos\Sigma'\sin D;$$

substituant cette valeur de $\sin d'$ dans la précédente, on obtiendra définitivement

$$(P) \qquad \tang\Sigma' = \tang D + \frac{\sin d}{(l-\lambda\psi)\cos D}.$$

Cette formule et celle (N) donnent le moyen de calculer

toutes les circonstances d'une éclipse; mais afin de pouvoir y appliquer aisément les logarithmes, il est nécessaire de leur faire subir préalablement quelques transformations. C'est pour avoir voulu les traiter directement, que M. Lagrange a rendu sa solution numérique extrêmement pénible, et même rebutante, quand on veut l'appliquer aux occultations des étoiles.

Les bornes de cet ouvrage ne permettant pas de donner plus d'étendue au sujet actuel, nous renverrons à la *Connaissance des Tems* pour 1818, où nous avons exposé, avec tous les détails convenables, les procédés les plus simples pour déterminer, à l'aide des formules ci-dessus, les erreurs des Tables lunaires et les longitudes terrestres.

Note de M. TERQUEM *sur la hauteur de la ville de Mayence au-dessus du niveau de l'Océan, déterminée par la formule barométrique de M. de Laplace.*

Pour évaluer cette hauteur, j'ai fait usage de la formule suivante, calculée pour la latitude d'un demi-angle droit;

$$z = 18393^{\text{mèt}}.\left(1 + \frac{2(t+t')}{1000}\right)\log\frac{h}{h'\left(1+\frac{t-t'}{5412}\right)}$$

(*Voyez* la Correspondance, tom. II, pag. 353 et la Mécanique de M. Poisson, tom. I, pag. 442).

h hauteur moyenne du baromètre au niveau de l'Océan $= 0^{\text{m}},7629$.
t = température moyenne au niveau de l'Océan $= 12°$ centigr.
h' = hauteur moyenne du baromètre à Mayence $= 0^{\text{m}},7496$.
t' = température moyenne de Mayence $= 9°,925$ (*C*)

Substituant ces valeurs dans l'expression de z qui est la hauteur cherchée, on trouve $z = 148^{\text{mèt}},238$.

Les valeurs de h et de t sont celles dont M. Biot s'est servi dans son Astronomie physique. h' est le résultat moyen de 1800 observations, et t' le résultat moyen de 5600, toutes faites par feu M. Anschel (*), savant médecin et professeur au Lycée de Mayence.

(*) Enlevé aux sciences et à l'humanité dans la force de l'âge et de son talent pendant la funeste contagion qui a désolé en 1814 la ville de Mayence. Aussi distingué par les qualités du cœur que par ses profondes connaissances dans l'art de guérir, mon malheureux ami a été victime des soins désintéressés et périlleux qu'il prodiguait dans ces tems désastreux, à la classe indigente. Les regrets des gens de bien, et les larmes des pauvres l'ont suivi dans la tombe.

Sur les lignes élastiques à double courbure; par M. Poisson.

Nous aurons besoin, dans cet article, de connaître les angles que fait la perpendiculaire au plan osculateur d'une courbe, avec les trois axes des coordonnées. Pour les déterminer, soit

$$Ax' + By' + Cz' = D,$$

l'équation de ce plan; appelons α, β, γ les angles demandés; de sorte que nous ayons, par les formules connues,

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Soient aussi x, y, z les coordonnées du point de la courbe, auquel se rapporte le plan osculateur; comme il doit passer par ce point et par les deux points consécutifs de la même courbe, nous aurons ces trois équations de condition :

$$Ax + By + Cz = D,$$
$$Adx + Bdy + Cdz = 0,$$
$$Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z = 0;$$

d'où l'on devra tirer les valeurs de A, B, C. Si l'on effectue l'élimination, et que, pour simplifier ces valeurs, on prenne la quantité D, qui est indéterminée, égale au dénominateur commun de A, B, C, on aura simplement

$$A = dzd^2y - dyd^2z, \quad C = dyd^2x - dxd^2y, \quad B = dxd^2z - dzd^2x,$$

et par conséquent

$$\cos\alpha = \frac{dzd^2y - dyd^2z}{K}, \quad \cos\beta = \frac{dxd^2z - dzd^2x}{K},$$
$$\cos\gamma = \frac{dyd^2x - dxd^2y}{K};$$

en faisant, pour abréger,

$$(dzd^2y - dyd^2z)^2 + (dxd^2z - dzd^2x)^2 + (dyd^2x - dxd^2y)^2 = K^2,$$

Maintenant considérons une ligne élastique dont les points soient tirés par des forces données, et qui soit en équilibre. Désignons cette courbe (sans qu'il soit nécessaire de faire la figure) par

AmB, de manière que *A* et *B* soient ses extrémités, et *m* un point quelconque répondant aux coordonnées x, y, z. Supposons que la partie *mB* de la courbe soit rendue inflexible et fixe, et que l'autre partie *mA* devienne seulement inflexible en conservant la liberté de tourner autour du point *m* : l'équilibre de la ligne entière devra encore subsister; par conséquent les forces données qui agissent sur la partie *mA*, et les forces d'élasticité qui ont lieu au point *m*, devront se faire équilibre autour de ce point fixe, ce qui exige que les sommes des momens de ces forces, pris par rapport à trois axes menés par le point *m*, soient égales à zéro.

Or, l'élasticité au point *m* tend à produire deux effets distincts. D'abord, elle tend à remettre en ligne droite les deux élémens de la courbe qui aboutissent en ce point, ou plus généralement, si la forme naturelle de cette courbe n'est pas la ligne droite, l'élasticité tend à rendre à l'angle de contingence en *m* la valeur, plus grande ou plus petite, qu'il avait dans l'état naturel de la courbe. Ce premier effet peut être attribué à une force qui s'exerce dans le plan osculateur de la courbe au point *m*; appelons donc E le moment de cette force, pris par rapport au point *m*. L'axe perpendiculaire à son plan fera avec ceux des coordonnées, les angles que nous venons de désigner par α, β, γ; donc, puisque les momens des forces se décomposent suivant les mêmes lois que les forces elles-mêmes (*), il s'ensuit que ceux de la force que nous considérons, rapportés à des droites menées par le point *m* et parallèles aux axes des x, des y et des z, seront respectivement

$$E\cos\alpha, \quad E\cos\beta, \quad E\cos\gamma;$$

ou bien, en faisant $\frac{E}{K}=u$, et mettant pour ces cosinus leurs valeurs précédentes,

$$u(dzd^2y-dyd^2z), \quad u(dxd^2z-dzd^2x), \quad u(dyd^2x-dxd^2y).$$

Lorsque la ligne élastique a été tordue sur elle-même, l'élasticité au point *m* tend à produire un second effet, qui consisterait à faire tourner la partie mobile *mA* de la courbe autour du prolongement indéfini de l'élément qui aboutit au point *m*, et qui appartient à la partie fixe *Bm*. Nous attribuerons ce second effet à une force qu'on peut appeler la *torsion*, et qui

(*) *Voyez* mon Traité de Mécanique, tom. Ier, pag 3. Nous entendons ici par moment relatif à un axe, celui de la force projetée sur un plan perpendiculaire à cet axe.

s'exerce dans un plan perpendiculaire à la tangente au point m. Soit θ son moment, pris par rapport à cette tangente ; les cosinus des angles que cette droite fait avec les axes des x, y, z sont $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, l'élément de la courbe étant représenté par ds ; par conséquent, les momens de la torsion, par rapport aux mêmes axes, seront

$$\frac{\theta dx}{ds}, \quad \frac{\theta dy}{ds}, \quad \frac{\theta dz}{ds}.$$

Enfin désignons par X, Y, Z les composantes des forces données qui agissent, suivant les x, y, z, sur le point de la courbe correspondant à ces coordonnées ; la somme des momens, par rapport à l'axe des x, des forces semblables qui agissent sur la partie mA de ces courbes, sera donnée par l'intégrale $\int(zY - yZ)dm$, dans laquelle dm représente l'élément matériel de la courbe ; et si l'on veut rapporter les momens de ces forces à la droite menée par le point m, parallèlement à l'axe des x, il est aisé de voir qu'il faudra ajouter à cette intégrale, la quantité $y\int Zdm - z\int Ydm$. On aura des résultats semblables relativement aux axes des y et des z ; donc les sommes des momens des forces données, pris par rapport aux trois droites menées par le point m, parallèlement aux axes des x, y, z, seront exprimées par ces formules :

$$\begin{aligned}
&\int(zY - yZ)dm + y\int Zdm - z\int Ydm, \\
&\int(xZ - zX)dm + z\int Xdm - x\int Zdm, \\
&\int(yX - xY)dm + x\int Ydm - y\int Xdm.
\end{aligned}$$

Les six intégrales qu'elles contiennent sont censées renfermer chacune une constante arbitraire provenant des forces particulières qui peuvent être appliquées au point A.

En ajoutant maintenant les momens des forces données et des forces d'élasticité qui se rapportent au même axe, et égalant les sommes à zéro, nous aurons les trois équations d'équilibre de la ligne élastique à double courbure et tordue sur elle-même, savoir :

$$\left.\begin{aligned}
&u(dzd^2y - dyd^2z) + \frac{\theta dx}{ds} \\
&+ \int(zY - yZ)dm + y\int Zdm - z\int Ydm = 0, \\
&u(dxd^2z - dzd^2x) + \frac{\theta dy}{ds} \\
&+ \int(xZ - zX)dm + z\int Xdm - x\int Zdm = 0, \\
&u(dyd^2x - dxd^2y) + \frac{\theta dz}{ds} \\
&+ \int(yX - xY)dm + x\int Ydm - y\int Xdm = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (1).$$

Si l'on différentie ces équations, on aura

$$dzd(ud^2y) - dyd(ud^2z) + d.\frac{\theta dx}{ds} + dy\int Zdm - dz\int Ydm = 0,$$

$$dxd(ud^2z) - dzd(ud^2x) + d.\frac{\theta dy}{ds} + dz\int Xdm - dx\int Zdm = 0,$$

$$dyd(ud^2x) - dxd(ud^2y) + d.\frac{\theta dz}{ds} + dx\int Ydm - dy\int Xdm = 0;$$

et si l'on ajoute celles-ci, après les avoir multipliées respectivement par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$, $\frac{dz}{ds}$, on aura

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds^2}.d\theta + \left(\frac{dx}{ds}d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d.\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d.\frac{dz}{ds}\right)\theta = 0;$$

mais on a identiquement

$$\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{ds^2} = 1, \text{ et } \frac{dx}{ds}d.\frac{dx}{ds} + \frac{dy}{ds}d.\frac{dy}{ds} + \frac{dz}{ds}d.\frac{dz}{ds} = 0;$$

d'où il résulte $d\theta = 0$, équation qui montre que le moment de la force de torsion est une quantité constante dans toute l'étendue de la courbe élastique en équilibre.

Ainsi la torsion n'est point une force dont on puisse déterminer la loi par une hypothèse, comme on le fait ordinairement pour l'élasticité proprement dite. La torsion ne dépend ni de la forme de la courbe, ni des forces telles que la pesanteur ou d'autres qui agissent en tous ses points ; elle est produite par une force appliquée à l'une ou l'autre extrémité, et dont le moment, par rapport à la tangente extrême, détermine la valeur de θ; et cette quantité, une fois donnée, reste la même pour tous les autres points de la courbe, de manière que si l'on venait à couper la courbe en un point quelconque, il faudrait, pour l'empêcher de se détordre, employer une force dont le moment, par rapport à la tangente en ce point, serait égal au moment de la force extrême qui a produit la torsion. M. Binet a eu égard le premier à la torsion dont les courbes élastiques sont susceptibles (*); mais on n'avait point encore expliqué la nature de cette force, et montré que son moment est constant dans l'état d'équilibre. Lagrange a donné, dans la Mécanique analytique (**), des équations de la ligne élastique à double

(*) Journal de l'Ecole Polytechnique, 17e cahier, pag. 418 et suivantes.

(**) Seconde édition, tom. 1er, pag. 154.

courbure, qu'il a trouvées par une analyse très-différente de la nôtre, et qui reviennent cependant à nos équations (1), en y supposant $\theta = 0$.

En ajoutant ces trois équations, après les avoir multipliées par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ et $\frac{dz}{ds}$, la quantité u disparaît, et l'on a

$$\theta + \frac{dx}{ds}.\int(zY-yZ)dm + \frac{dy}{ds}.\int(xZ-zX)dm + \frac{dz}{ds}.\int(yX-xY)dm$$
$$+\frac{ydx-xdy}{ds}.\int Zdm + \frac{xdz-zdx}{ds}.\int Ydm + \frac{zdy-ydz}{ds}.\int Xdm = 0. \quad (2)$$

La quantité u disparaîtrait encore, en ajoutant ces mêmes équations, après les avoir multipliées par $\frac{d^2x}{ds}$, $\frac{d^2y}{ds}$, $\frac{d^2z}{ds}$; supposant de plus ds constant, ce qui est permis et ce qui donne $dsd^2s = dxd^2x + dyd^2y + dzd^2z = 0$, on aura

$$\frac{d^2x}{ds}.\int(zY-yZ)dm + \frac{d^2y}{ds}.\int(xZ-zX)dm + \frac{d^2z}{ds}.\int(yX-xY)dm$$
$$+\frac{yd^2x-xd^2y}{ds}.\int Zdm + \frac{xd^2z-zd^2x}{ds}.\int Ydm + \frac{zd^2y-yd^2z}{ds}.\int Xdm = 0;$$

mais cette équation est une suite de la précédente, comme il est facile de le vérifier, en différentiant celle-ci dans l'hypothèse de ds constant, et observant que $d\theta = 0$.

Il résulte de là que pour déterminer la courbe élastique, on pourra prendre l'équation (2), jointe à l'une des équations (1), ou à telle combinaison qu'on voudra de ces trois équations, pourvu qu'elle renferme encore la variable u. Quant à cette quantité, on a $u = \frac{E}{K}$, et l'on suppose communément le moment E de l'élasticité au point m, proportionnel au carré de l'épaisseur de la courbe, multiplié par l'excès de l'angle de contingence qui a lieu en ce point dans l'état d'équilibre, sur celui qui avait lieu au même point dans l'état naturel de la courbe. Ces angles étant en raison inverse des rayons de courbure qui leur répondent, cette hypothèse revient à faire

$$E = a\varepsilon^2\left(\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}\right),$$

a étant un coefficient qui dépend de la matière de la courbe, ε son épaisseur au point m, ρ son rayon de courbure au même point, et r celui qui avait lieu en ce point dans l'état naturel de la courbe. Comme elle est supposée inextensible, il s'ensuit

que l'arc s, compté de l'extrémité A et aboutissant au point m, ne doit pas changer, quand la courbe est infléchie par les forces qui lui sont appliquées; ainsi le rayon r pourra être censé donné en fonction de s, dans chaque cas particulier. L'expression du rayon ρ, dans une courbe quelconque, est $\rho = \frac{ds^3}{K}$, K ayant la même signification que plus haut; on aura donc

$$u = \frac{E}{K} = \frac{as^2}{ds^3} \cdot \left(1 - \frac{ds^3}{rK}\right),$$

pour la valeur de u qu'il faudra substituer dans la seconde équation de la courbe élastique. L'intégration de ces deux équations simultanées est impossible en général, et l'on ne parvient à y séparer les variables que dans des cas très-particuliers et les plus simples qu'on puisse traiter.

Nous terminerons cet article par une remarque qui pourra être souvent utile. Lorsque, dans une question de Géométrie ou de Mécanique, tout est semblable par rapport aux trois axes des coordonnées x, y, z, et si l'on a une équation relative à l'un de ces axes, il existera des équations analogues qui se rapporteront aux deux autres, qui se déduiront de l'équation donnée par de simples permutations des variables x, y, z, et de toutes les autres quantités qui s'y rapportent; mais pour ne pas risquer de se tromper, et pour que les quantités analogues conservent la même signification et ne changent pas de signe, il faudra effectuer cette permutation d'une certaine manière que nous allons indiquer, et dont on concevra aisément la raison. On rangera les lettres x, y, z, et toutes celles qui leur répondent, de cette manière :

$$\begin{array}{lll} x, & y, & z\ldots\ldots\ldots, \\ z, & x, & y\ldots\ldots\ldots; \end{array}$$

puis on remplacera chaque lettre de la ligne supérieure par celle qui se trouve au-dessous dans la ligne inférieure; de sorte que x aille prendre la place de y, y celle de z, et z celle de x : l'équation donnée se changera, par cette permutation, en une autre qui se rapportera à un second axe; et en effectuant sur celle-ci la même permutation, on aura l'équation analogue par rapport au troisième axe. C'est ainsi, par exemple, que nous avons déduit la troisième équation (1), qui se rapporte à l'axe des z, de la première, qui est relative à l'axe des x, et ensuite, par une seconde permutation, la seconde équation, de la troisième.

Mémoire (*) sur l'attraction des sphéroïdes, par M. RODRIGUES*, Docteur ès-sciences.*

PREMIÈRE PARTIE.

Formules générales pour l'attraction des corps quelconques, et application de ces formules à la sphère et aux ellipsoïdes.

1. Désignons par u la distance de l'élément du corps attirant au point attiré, par $\varphi(u)$ la loi de l'attraction, par dm l'élément du corps attirant, et faisons $\Sigma = \int \varphi(u)dm$, cette intégrale étant étendue à toute la masse du corps attirant. Soient ξ, φ, ψ les coordonnées du point attiré; les composantes de l'attraction du corps, suivant ces coordonnées, seront, comme on sait,

$$\frac{d\Sigma}{d\xi}, \quad \frac{d\Sigma}{d\varphi}, \quad \frac{d\Sigma}{d\psi}.$$

Soient a, b, c les coordonnées rectangulaires du point attiré, la loi de l'attraction, celle de la nature, ensorte que $\varphi(u) = \frac{1}{u^2}$; faisons $V = \int \frac{dm}{u}$, les composantes respectives désignées par A, B, C, seront

$$A = -\frac{dV}{da}, \quad B = -\frac{dV}{db}, \quad C = -\frac{dV}{dc}.$$

x, y, z étant les coordonnées rectangulaires de l'élément dm, ρ sa densité, on aura

$$dm = \rho dxdydz, \quad u = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2},$$

et

$$V = \int \frac{\rho dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

On emploie aussi fréquemment des coordonnées polaires, savoir, le rayon mené de l'origine (r), l'angle que ce rayon fait avec une droite fixe (θ), et enfin l'angle formé par le plan de ces deux droites avec un plan fixe passant par la droite fixe (ϖ). Alors on décompose l'attraction suivant le rayon et deux perpendiculaires à ce rayon, l'une dirigée dans le plan de l'angle θ, et tendant à le diminuer; l'autre, perpendiculaire à ce plan, et tendant à diminuer l'angle ϖ. Ces trois composantes seront respectivement

(*) Ce Mémoire a été le sujet d'une thèse soutenue pour le doctorat, devant la Faculté des Sciences de Paris, le 28 juin 1815, sous la présidence de M. Lacroix, Doyen de la Faculté.

$$-\frac{dV}{dr}, \quad -\frac{1}{r}\frac{dV}{d\theta}, \quad -\frac{1}{r\sin\theta}\frac{dV}{d\varpi}.$$

2. La quantité $\frac{1}{u}$ (*) satisfait, comme il est aisé de le vérifier, à l'équation

$$\frac{d^2.\frac{1}{u}}{da^2}+\frac{d^2.\frac{1}{u}}{db^2}+\frac{d^2.\frac{1}{u}}{dc^2}=0.$$

On aura donc une relation pareille pour la fonction V, savoir

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}=0; \qquad (1)$$

cette conclusion suppose néanmoins que pour aucun point du corps, $\frac{1}{u}$ ne devient infini; ou, ce qui est la même chose, que le point attiré ne fait pas partie de la masse du corps attirant. Dans ce cas, voyons ce qui arrive. L'expression $\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}+\frac{d^2V}{dc^2}$ peut être remplacée par celle-ci :

$$-\left(\frac{dA}{da}+\frac{dB}{db}+\frac{dC}{dc}\right).$$

Pour calculer cette formule, transportons l'origine des coordonnées au point attiré, et puis à cette origine prenons des coordonnées polaires, nous aurons

$$x=a+r\cos\theta, \quad y=b+r\sin\theta\cos\varpi, \quad z=c+r\sin\theta\sin\varpi.$$

$$A=-\int\rho\cos\theta\sin\theta d\theta d\varpi dr,$$
$$B=-\int\rho\cos\varpi\sin^2\theta d\theta d\varpi dr,$$
$$C=-\int\rho\sin\varpi\sin^2\theta d\theta d\varpi dr.$$

Ces intégrales doivent être prises depuis $r=0$ jusqu'à la valeur de r relative à la surface du corps, et que nous appellerons R ; et par rapport aux angles θ et ϖ, depuis $\theta=0$ jusqu'à $\theta=\varpi$, et depuis $\varpi=0$ jusqu'à $\varpi=2\varpi$.

Posons

$$x'=r\cos\theta, \qquad y'=r\sin\theta\cos\varpi, \qquad z'=r\sin\theta\sin\varpi;$$

ρ sera fonction seulement des trois variables sommes $x'+a$,

(*) *Voyez* une note de M. Poisson sur cet objet, dans le Bulletin de la Société Philomatique pour le mois de décembre 1813, tom. III, pag. 388.

$y' + b$, $z' + c$; on aura donc $\frac{d\rho}{da} = \frac{d\rho}{dx'}$, etc. Désignons par ρ_1, la densité du corps attiré, et par ρ_2 la densité à la surface; et observons qu'en prenant les différences partielles $\frac{dA}{da}$, $\frac{dB}{db}$, $\frac{dC}{dc}$, il faut avoir égard à la variation de la limite R. De cette manière nous aurons

$$-\frac{dA}{da} - \frac{dB}{db} - \frac{dC}{dc},$$

ou

$$\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = \int \frac{\sin\theta d\theta d\varpi dr}{r} \left(x' \frac{d\rho}{dx'} + y' \frac{d\rho}{dy'} + z' \frac{d\rho}{dz'}\right)$$
$$\int \frac{\sin\theta d\theta d\varpi}{R} . \rho_2 \left(x' \frac{dR}{da} + y' \frac{dR}{db} + z' \frac{dR}{dc}\right);$$

mais il est évident que $x' \frac{d\rho}{dx'} + y' \frac{d\rho}{dy'} + z' \frac{d\rho}{dz'} = r \frac{d\rho}{dr}$. D'ailleurs, soit $F(x, y, z) = 0$ l'équation de la surface du corps; on aura, pour déterminer R,

$$F(a + R\cos\theta,\quad b + R\sin\theta\cos\varpi,\quad c + R\sin\theta\sin\varpi) = 0.$$

On tire de cette équation

$$x' \frac{dR}{da} + y' \frac{dR}{db} + z' \frac{dR}{dc} = -R;$$

on trouve donc

$$\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = \int \sin\theta d\theta d\varpi \frac{d\rho}{dr} dr - \int \rho_2 \sin\theta d\theta d\varpi.$$

Or il est évident que

$$\int \sin\theta d\theta d\varpi \frac{d\rho}{dr} dr = \int \rho_2 \sin\theta d\theta d\varpi - \rho_1 \int \sin\theta d\theta d\varpi;$$

d'ailleurs $\int \sin\theta d\theta d\varpi = 4\pi$. On a donc, en définitif,

$$\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} + 4\pi\rho_1 = 0. \qquad (2)$$

Application des formules précédentes à l'attraction des sphères.

3. Supposons que le corps attirant soit une sphère, ou plus généralement une couche sphérique ayant l'origine des coordon-

nées pour centre, et composées de couches sphériques homogènes et concentriques, ensorte que la densité ρ ne soit fonction que de la distance au centre de la couche. Soit r le rayon du point attiré, V ne sera fonction que de r, et l'on aura

$$r^2 = a^2 + b^2 + c^2, \quad \frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr}.$$

Si le point attiré ne fait pas partie de la couche attirante, nous aurons

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} = 0;$$

d'où l'on tire, par l'intégration,

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{A}{r^2},$$

A étant une constante. Cette formule exprime l'action totale de la couche sur le point attiré. Si ce point est situé à l'extérieur de la couche, et qu'on l'en éloigne indéfiniment, ensorte que r devienne infinie, l'attraction décroissant en raison inverse du carré de la distance, on devra, dans cette hypothèse, avoir

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{M}{r^2},$$

M étant la masse de la couche; ainsi $A = M$ pour tous les points extérieurs à la couche. Si, au contraire, on considère l'action de la couche dans son intérieur, comme alors elle est évidemment nulle pour $r = 0$, il faut que $A = 0$ toujours. Ainsi, 1°. une couche sphérique homogène, ou seulement composée de couches sphériques homogènes et concentriques, attire un point extérieur, comme si toute sa masse était réunie à son centre. Ce théorème s'applique naturellement à une sphère entière. 2°. Une pareille couche n'exerce aucune action dans son intérieur.

Ces théorèmes subsistent encore lorsque le point attiré est situé à la surface extérieure de la couche sphérique, quant au premier, et à la surface intérieure, quant au second. De leur combinaison on peut aisément déduire l'attraction qu'exerce une couche sphérique sur un point de sa masse. Mais employons plutôt l'équation (2); elle devient

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dV}{dr} + 4\pi\rho = 0,$$

ρ étant fonction du seul rayon r. Multiplions cette équation par r^2; elle deviendra

$$d.r^2\frac{dV}{dr}+4\pi\rho r^2dr=0;$$

intégrant, on trouve

$$-\frac{dV}{dr}=\frac{4\pi\int\rho r^2dr+\text{const.}}{r^2},$$

l'intégrale étant prise depuis le rayon intérieur de la couche jusqu'au point attiré. Mais à la première limite, l'action de la couche est nulle; on a donc simplement

$$-\frac{dV}{dr}=\frac{4\pi\int\rho r^2dr}{r^2},$$

ou bien

$$-\frac{dV}{dr}=\frac{M'}{r^2},$$

M' désignant la portion de la couche sphérique comprise entre sa surface intérieure, et la surface sphérique passant par le point attiré.

Attraction des Cylindres.

4. L'équation (1) s'intègre encore aisément dans le cas d'un cylindre infini, l'axe étant parallèle aux coordonnées z. En effet, V n'est alors fonction que des deux coordonnées a, b, et l'on a pour cette équation

$$\frac{d^2V}{da^2}+\frac{d^2V}{db^2}=0;$$

d'où l'on tire $r=\varphi(a+b\sqrt{-1})+\psi(a-b\sqrt{-1})$, résultat sans application directe. Si le cylindre est circulaire et qu'on fasse $a^2+b^2=r^2$, V ne sera plus fonction que de r, et l'on aura

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dV}{dr}=0;$$

d'où $-\frac{dV}{dr}=\frac{H}{r}$. C'est la formule de l'attraction d'un cylindre homogène circulaire, ou plus généralement, d'une couche cylindrique circulaire et composée de couches pareilles homogènes, sur un point hors de sa masse. Pour les points intérieurs à cette couche, il est clair que H doit être nul; ainsi il en est d'une couche cylindrique, à cet égard, comme d'une couche sphérique. Soit a le rayon du cylindre, K l'attraction du cy-

lindre sur un point de sa surface extérieure, on aura

$$aK = H, \quad \text{et} \quad -\frac{dV}{dr} = \frac{aK}{r}$$

pour les points extérieurs; reste à déterminer K. Mais prenons l'équation (2) dans le cas du cylindre circulaire; elle donne

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dV}{dr} + 4\pi\rho = 0,$$

et l'on en tire, par l'intégration,

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{4\pi\int\rho r dr + \text{const.}}{r},$$

l'intégrale étant prise depuis la valeur de r égale au rayon intérieur de la couche cylindrique; mais pour cette valeur de r l'attraction est nulle; ainsi on a seulement

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{4\pi\int\rho r dr}{r} = \frac{2A}{r},$$

en désignant par A la portion de la section circulaire de la couche cylindrique comprise entre son rayon intérieur et le rayon r du point attiré. Si $r = a$ on a $-\frac{dV}{dr} = K = \frac{2A}{a}$; ainsi la formule relative aux points extérieurs est

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{2A}{r},$$

A représentant la section circulaire de la couche cylindrique.

Attraction des Ellipsoïdes.

5. Soient K, K', K'' les trois axes d'un ellipsoïde homogène (nous supposerons la densité égale à 1), x, y, z les trois coordonnées de l'élément dm; nous aurons $dm = dxdydz$, et

$$V = \int \frac{dxdydz}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Nous rendrons toutes les limites de cette intégrale triple indépendantes, par la transformation suivante :

$$x = Kr\cos\theta, \quad y = K'r\sin\theta\cos\varpi, \quad z = K''r\sin\theta\sin\varpi.$$

Les variables r, θ et ϖ devant s'étendre depuis $r = 0$ jusqu'à $r = 1$, depuis $\theta = 0$ jusqu'à $\theta = \pi$, et depuis $\varpi = 0$ jusqu'à

$\varpi = 2\pi$; nous aurons alors

$$dxdydz = KK'K''r^2dr \sin\theta d\theta d\varpi.$$

Nous pouvons donner à cet élément une autre expression qui nous sera fort utile. Considérons la couche elliptique dont la surface intérieure aurait pour équation

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{K'^2} + \frac{z^2}{K''^2} = r^2.$$

Soit ι l'épaisseur de cette couche, ds^2 l'élément superficiel correspondant pris sur sa surface ; on aura $dxdydz = \iota ds^2$. Soient X, Y, Z les cosinus des angles que fait avec les axes des coordonnées la normale à la surface intérieure de la couche, dx, dy, dz les différentielles des coordonnées, en ne faisant varier que le paramètre r ; nous aurons

$$\iota = Xdx + Ydy + Zdz.$$

On calcule aisément cette formule, et l'on trouve

$$\iota = \frac{rdr}{\sqrt{\frac{x^2}{K^4} + \frac{y^2}{K'^4} + \frac{z^2}{K''^4}}}.$$

Appelons M la masse de l'ellipsoïde, qui est égale, comme on sait, à $\frac{4}{3}\pi KK'K''$, et faisons $V = MZ$; nous aurons

$$\frac{4}{3}\pi Z = \int \frac{r^2dr \sin\theta d\theta d\varpi}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}.$$

Différentions cette équation par rapport aux axes K, K', K'', et désignons ces différentielles par la caractéristique δ. Or nous avons $\delta x = \frac{x\delta K}{K}$, $\delta y = \frac{y\delta K'}{K'}$, $\delta z = \frac{z\delta K''}{K''}$; et si nous supposons les excentricités constantes, ensorte que

$$K'^2 = K^2 + e^2, \qquad K''^2 = K^2 + e'^2,$$

e, e' ne variant pas, nous en déduirons $\delta x = \frac{Kx\delta K}{K^2}$,

$\delta y = \frac{Ky\delta K}{K'^2}$, $\delta z = \frac{Kz\delta K}{K''^2}$, et par suite

$$-\tfrac{4}{3}\pi\delta Z = K\delta K \int r^2 dr \sin\theta d\theta d\varpi \left\{ \frac{(x-a)\frac{x}{K^2} + (y-b)\frac{y}{K'^2} + (z-c)\frac{z}{K''^2}}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} \right\}.$$

Mais $KK'K''r^2 dr \sin\theta d\theta d\varpi = \iota ds^2$, $X = \frac{\iota x}{rdrK^2}$, $Y = \frac{\iota y}{rdrK'^2}$, $Z = \frac{\iota z}{rdrK''^2}$, résultats aisés à tirer de ce qui précède. On aura donc

$$-\tfrac{4}{3}\pi\delta Z = \frac{\delta K}{K'K''} \int r dr . \int \frac{(x-a)X+(y-b)Y+(z-c)Z}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} ds^2.$$

La seconde de ces intégrales représente la somme de tous les élémens de la surface dont l'équation est

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{K'^2} + \frac{z^2}{K''^2} = r^2,$$

multipliés chacun par le cosinus de l'angle qui forme la normale dirigée du dedans au dehors, avec le rayon mené au point attiré et divisés par le carré de ce rayon. Or on prouve aisément qu'une pareille somme est nulle ou égale à 4π, pour une surface quelconque fermée, selon que le point qui est l'origine des rayons est à l'extérieur ou à l'intérieur de la surface (*).

(*) L'élément $\frac{(x-a)X+(y-b)Y+(z-c)Z}{[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{\frac{3}{2}}} ds^2$ n'est autre chose que celui de la surface d'une sphère d'un rayon égal à 1, dont le centre serait au point qui a pour coordonnées a, b, c. Soit $u = 0$ l'équation de la surface, on a

$$X = \frac{\frac{du}{dx}}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}} \text{ etc.};$$

le signe de l'expression de l'élément dont il s'agit sera le même que celui de la quantité

$$(x-a)\frac{du}{dx} + (y-b)\frac{du}{dy} + (z-c)\frac{du}{dz},$$

or faisons,

$$x = a + r\cos\theta, \quad y = b + r\sin\theta\cos\varpi, \quad z = c + r\sin\theta\sin\varpi.$$

Par conséquent, si le point attiré est extérieur à l'ellipsoïde, nous aurons $\delta Z = 0$, l'intégrale multipliée par rdr étant nulle pour toutes les valeurs de r, ainsi

« La fonction $\frac{V}{M}$, calculée pour les points extérieurs à l'el-
» lipsoïde, ne dépend que des excentricités de cet ellipsoïde. »

Mais si le point attiré est dans l'intérieur de l'ellipsoïde, et situé sur une surface dont l'équation soit

$$\frac{x^2}{K^2} + \frac{y^2}{K'^2} + \frac{z^2}{K''^2} = r'^2.$$

L'intégrale multipliée par rdr ne sera nulle que pour toutes les valeurs de r moindres que r', et sera égale à 4π pour toutes les autres; intégrant donc depuis $r = r'$ jusqu'à $r = 1$, nous aurons

$$\delta Z = \frac{3\delta K}{2K'K''}(r'^2 - 1) = \frac{3\delta K}{2K'K''}\left(\frac{a^2}{K^2} + \frac{b^2}{K'^2} + \frac{c^2}{K''^2} - 1\right),$$

et de là,

$$\delta \frac{dZ}{da} = \frac{3a}{KK'K''} \cdot \frac{\delta K}{K},$$

$$\delta \frac{dZ}{db} = \frac{3b}{KK'K''} \cdot \frac{\delta K'}{K'},$$

$$\delta \frac{dZ}{dc} = \frac{3c}{KK'K''} \cdot \frac{\delta K''}{K''}.$$

Pour intégrer ces expressions, j'observe que Z et ses dérivées doivent être nulles pour $K = \infty$. Représentons, pour plus de clarté, par h, h', h'' les axes de l'ellipsoïde, et faisons

---

Cette formule devient $r\frac{du}{dr}$.

Soient r_1, r_2, r_3 les racines réelles de l'équation u transformée. Ces racines étant rangées par ordre de grandeur. On sait que $\frac{du}{dr}$ sera alternativement positif ou négatif, lorsqu'on fera successivement $r = r_1$, $r = r_2$, etc... Si donc le nombre des valeurs de r est pair, la somme des élémens que nous considérons sera nulle pour chaque valeur de ϖ et de θ.

L'intégrale entière sera donc nulle. La surface étant fermée, c'est bien le cas où le point aux coordonnées a, b, c est extérieur. Si au contraire ce point est intérieur, le nombre des valeurs de r sera impair, et alors la somme des mêmes élémens sera positive et égale à un seul d'entr'eux. L'integrale entière prise pour toutes les valeurs de θ et de ϖ sera donc égale à 4π, surface d'une sphère d'un rayon égal à 1.

$K = \frac{h}{x}$. Les intégrations devront s'étendre depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$. Or nous avons

$$K'^2 = K^2 + e^2, \quad K''^2 = K^2 + e'^2;$$

faisons $e = \lambda h$, $e' = \lambda' h$, il viendra

$$K' = \frac{h\sqrt{1 + \lambda^2 x^2}}{x}, \quad K'' = \frac{h\sqrt{1 + \lambda'^2 x^2}}{x},$$

et l'on trouvera, en intégrant,

$$-\frac{dZ}{da} = \frac{3a}{h^3}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + \lambda^2 x^2}\sqrt{1 + \lambda'^2 x^2}} = \frac{A}{M},$$

$$-\frac{dZ}{db} = \frac{3b}{h^3}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + \lambda'^2 x^2}(1 + \lambda^2 x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{B}{M},$$

$$-\frac{dZ}{dc} = \frac{3c}{h^3}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + \lambda^2 x^2}(1 + \lambda'^2 x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{C}{M}.$$

Posons $F = \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1 + \lambda^2 x^2}\sqrt{1 + \lambda'^2 x^2}}$, nous trouverons

$$A = \frac{3aM}{h^3}F, \quad B = \frac{3bM}{h^3}\frac{d.\lambda F}{d\lambda}, \quad C = \frac{3cM}{h^3}\frac{d.\lambda' F}{d\lambda'}.$$

Il est aisé de s'assurer que ces expressions vérifient l'équation (2); en effet, on a

$$\delta\left(\frac{d^2Z}{da^2} + \frac{d^2Z}{db^2} + \frac{d^2Z}{dc^2}\right) = -3\delta.\frac{1}{KK'K''};$$

intégrant de manière que l'intégrale soit nulle pour $K = \infty$, on en tire

$$\frac{d^2Z}{da^2} + \frac{d^2Z}{db^2} + \frac{d^2Z}{dc^2} + \frac{3}{KK'K''} = 0,$$

et remettant pour Z sa valeur,

$$\frac{d^2V}{da^2} + \frac{d^2V}{db^2} + \frac{d^2V}{dc^2} + 4\pi = 0.$$

Cette équation peut s'écrire ainsi :

$$\frac{A}{a}+\frac{B}{b}+\frac{C}{c}=4\pi.$$

Les formules d'attraction ci-dessus ne sont, comme on le voit, fonctions que des rapports des axes ; d'où l'on peut conclure que l'attraction exercée par une couche elliptique homogène sur un point intérieur, est nulle.

6. Supposons actuellement le point attiré extérieur à l'ellipsoïde; nous savons qu'alors la fonction $\frac{V}{M}$ ne dépend que des excentricités e, e' ; il en sera de même des rapports $\frac{A}{M}$, $\frac{B}{M}$, $\frac{C}{M}$. Soient donc M', l, l', l'' la masse et les axes d'un nouvel ellipsoïde décrit des mêmes foyers que le premier, et dont la surface passerait par le point attiré. Soient A', B', C' les composantes de son attraction, nous aurons

$$A=\frac{A'M}{M'},\quad B=\frac{B'M}{M'},\quad C=\frac{C'M}{M'},$$

$$l'^2=l^2+e^2,\quad l''^2=l^2+e'^2,\quad \frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{l'^2}+\frac{c^2}{l''^2}=1.$$

Ces trois dernières équations n'admettent qu'un seul système de valeurs pour l, l', l''.

A', B', C' pourront être calculées par les formules qui servent pour les points intérieurs. Posons $e=\mu l$, $e'=\mu' l$, ... $F=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{1+\mu^2x^2}\sqrt{1+\mu'^2x^2}}$, nous avons

$$A'=\frac{3aM'}{l^3}F,\quad B'=\frac{3bM'}{l^3}\frac{d.\mu F}{d\mu},\quad C'=\frac{3cM'}{l^3}\frac{d.\mu' F}{d\mu'},$$

et par suite

$$A=\frac{3aM}{l^3}F,\quad B=\frac{3bM}{l^3}\frac{d\mu.F}{d\mu},\quad C=\frac{3cM}{l^3}\frac{d.\mu' F}{d\mu'}.$$

7. En repassant les calculs qui ont conduit à la fonction F, on trouve que les quantités $\frac{F}{l^3}$, $\frac{1}{l^3}\frac{d.\mu F}{d\mu}$, $\frac{1}{l^3}\frac{d.\mu' F}{d\mu'}$ peuvent être remplacées par ces trois intégrales

$$-\int\frac{dK}{K}\times\frac{1}{KK'K''},\quad -\int\frac{dK'}{K'}\times\frac{1}{KK'K''},\quad -\int\frac{dK''}{K''}\times\frac{1}{KK'K''}.$$

prises depuis $K=\infty$ jusqu'à $K=l$. Désignons-les respectivement par P, Q, R, nous aurons

$$\frac{dA}{da}=3MP+3Ma\,\frac{dP}{da},$$

$$\frac{dB}{db}=3MQ+3Mb\,\frac{dQ}{db},$$

$$\frac{dC}{dc}=3MR+3Mc\,\frac{dR}{dc},$$

et par suite,

$$\frac{dA}{da}+\frac{dB}{db}+\frac{dC}{dc}=3M(P+Q+R)+3M\left(a\frac{dP}{da}+b\frac{dQ}{db}+c\frac{dR}{dc}\right).$$

Or,
$$\frac{dP}{da}=-\frac{\frac{dl}{da}}{l}\times\frac{1}{ll'l''},\qquad \frac{dQ}{db}=-\frac{\frac{dl'}{db}}{l'}\times\frac{1}{ll'l''},$$

$$\frac{dR}{dc}=-\frac{\frac{dl''}{dc}}{l''}\times\frac{1}{ll'l''};$$

par ce que nous avons vu plus haut,

$$P+Q+R=\frac{1}{ll'l''}.$$

Ainsi,
$$\frac{dA}{da}+\frac{dB}{db}+\frac{dC}{dc}=\frac{3M}{ll'l''}\left(1-a\frac{\frac{dl}{da}}{l}-b\frac{\frac{dl'}{db}}{l'}-c\frac{\frac{dl''}{dc}}{l''}\right).$$

Or, de l'équation $\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{l'^2}+\frac{c^2}{l''^2}=1$, on tire

$$\frac{a}{l^2}=l\,\frac{dl}{da}\left(\frac{a^2}{l^4}+\frac{b^2}{l'^4}+\frac{c^2}{l''^4}\right),$$

$$\frac{b}{l'^2}=l'\,\frac{dl'}{db}\left(\frac{a^2}{l^4}+\frac{b^2}{l'^4}+\frac{c^2}{l''^4}\right),$$

$$\frac{c}{l''^2}=l''\,\frac{dl''}{dc}\left(\frac{a^2}{l^4}+\frac{b^2}{l'^4}+\frac{c^2}{l''^4}\right),$$

en observant que $ldl=l'dl'=l''dl''$.

Multiplions la première équation par $\frac{a}{l^2}$, la deuxième par $\frac{b}{l'^2}$,

la troisième par $\frac{l''^2}{c}$, et ajoutons, nous trouverons

$$a\frac{\frac{dl}{da}}{l}+b\frac{\frac{dl'}{db}}{l'}+c\frac{\frac{dl''}{dc}}{l''}=1.$$

Ainsi, $\frac{dA}{da}+\frac{dB}{db}+\frac{dC}{dc}=0$, ce qui vérifie l'équation (1).

8. De la comparaison des formules d'attraction sur les points intérieurs et extérieurs, on déduit très-simplement le théorème suivant, dû à M. Yvory.

« Si l'on a deux ellipsoïdes homogènes qui aient le même » centre et les mêmes foyers, l'attraction, suivant chaque axe, » que l'un des deux corps exerce sur un point de la surface » de l'autre, est à l'attraction de celui-ci sur le point *correspon-* » *dant* de la surface du premier, comme le produit des deux » autres axes du premier ellipsoïde, est au produit des deux » autres axes du second. »

M. Yvory appelle points correspondans sur les surfaces de deux ellipsoïdes rapportés aux mêmes axes, deux points dont les coordonnées sont entr'elles dans le rapport des axes auxquels elles sont parallèles.

La démonstration directe de ce théorème est très-facile, et M. Poisson a même observé qu'elle s'appliquait à une loi quelconque d'attraction et conduisait toujours au même résultat (*). Ainsi, par exemple, considérons deux sphères concentriques, l'attraction de la première sur un point de la surface de la seconde, est à l'attraction de celle-ci sur un point de la surface de la première, dans le rapport des carrés des deux sphères, indépendamment de la loi de l'attraction. Soient A, A', r, r' les attractions et les rayons des deux sphères, on aura la relation

$$A=\frac{A'r^2}{r'^2},$$

qui servira à faire connaître l'attraction d'une sphère sur un point extérieur, lorsqu'on connaîtra celle qu'elle exerce sur un point intérieur, et réciproquement. Si $r>r'$, et si la loi de l'attraction est celle de la nature, on aura $A'=\frac{4}{3}\frac{\pi r'^3}{r^2}$, et $A=\frac{4}{3}\pi r'$, pour l'attraction de la sphère dont le rayon est r sur un point intérieur. A étant indépendant du rayon r, il

(*) *Voyez* le Bulletin de la Société Philomatique, année 1812, tome III, pag. 180.

s'ensuit que l'action d'une couche sphérique sur un point intérieur est nulle. Réciproquement, pour que ce théorème existe, il faut que A soit indépendant de r; mais alors on a $A' = \frac{H}{r^2}$, H étant une constante par rapport à r, c'est-à-dire que dans ce cas les sphères attirent les points extérieurs en raison inverse du carré de la distance à leur centre, ce qui exige évidemment que l'attraction même d'une molécule suive la même loi. « La loi de la nature est donc la seule dans laquelle une » couche sphérique n'exerce aucune action dans son intérieur. »

SECONDE PARTIE.

Attraction des Sphéroïdes infiniment peu différens d'une sphère, et développement général de la fonction V.

9. Nous emploierons dans toute cette seconde Partie les coordonnées polaires, et nous désignerons toujours par r, μ, ϖ celles du point attiré, et par r', μ', ϖ' celles du corps, μ, μ' étant mis pour $\cos\theta$, $\cos\theta'$.

On a $a = \mu r$, $b = \sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi r$, $c = \sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi r$, et

$$V = \int \frac{\rho' r'^2 dr' d\mu' d\varpi'}{\sqrt{r'^2 - 2rr'[\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varpi'-\varpi)] + r^2}}.$$

L'origine des coordonnées étant prise dans le corps même, soit

$$T = T^{(0)} + T^{(1)}t + T^{(2)}t^2 + \text{etc.}\dots \qquad (3)$$

le développement du radical

$$[1 - 2[\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varpi'-\varpi)]t + t^2]^{-\frac{1}{2}};$$

V pourra se développer dans les deux séries suivantes :

$$V = \frac{V^{(0)}}{r} + \frac{V^{(1)}}{r^2} + \frac{V^{(3)}}{r^3} + \text{etc.}\dots, \qquad (4)$$

$$V = v^{(0)} + v^{(1)}r + v^{(2)}r^2 + \text{etc.}\dots, \qquad (5)$$

dans lesquelles

$$\left.\begin{aligned} V^{(m)} &= \int \rho' T^{(m)} r'^{m+2} dr' d\mu' d\varpi' \\ v^{(m)} &= \int \rho' T^{(m)} r'^{1-m} dr' d\mu' d\varpi' \end{aligned}\right\}. \qquad (6)$$

La série (4) sera convergente si r est toujours $> r'$, ce qui est le cas d'un point extérieur à un sphéroïde infiniment peu diffé-

rent d'une sphère, l'origine étant au centre du sphéroïde. La série (6), au contraire, sera convergente si r est toujours $< r'$, ce qui est le cas d'un point intérieur à une couche sphéroïdique. Ces conditions de convergence sont indispensables pour la certitude des résultats.

Développement de la fonction T.

10. La fonction T n'est autre chose que le radical........ $[(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2]^{-\frac{1}{2}}$, dans lequel on ferait $x=\mu t$, $y=\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi' t$, $z=\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi' t$; $a=\mu'$, $b=\sqrt{1-\mu'^2}\cos\varpi$, $c=\sqrt{1-\mu'^2}\sin\varpi$; or on a

$$\frac{d^2T}{dx^2}+\frac{d^2T}{dy^2}+\frac{d^2T}{dz^2}=0.$$

Cette équation devient, par la transformation,

$$\frac{d.(1-\mu^2)\dfrac{dT}{d\mu}}{d\mu}+\frac{\dfrac{d^2T}{d\varpi^2}}{1-\mu^2}+t\,\frac{d^2.Tt}{dt^2}=0, \qquad (7)$$

Si l'on y substitue pour T la série (3), on trouve, pour déterminer $T^{(m)}$, l'équation

$$\frac{d(1-\mu^2)\dfrac{dT^{(m)}}{d\mu}}{d\mu}+\frac{\dfrac{d^2T^{(m)}}{d\varpi^2}}{1-\mu^2}+m(m+1)T^{(m)}=0.$$

Représentons par Z_m l'intégrale de cette équation; cherchons-en l'expression, puis nous en déduirons $T^{(m)}$ par quelques conditions particulières à ce coefficient. On aura

$$\frac{d.(1-\mu^2)\dfrac{dZ_m}{d\mu}}{d\mu}+\frac{\dfrac{d^2Z_m}{d\varpi^2}}{1-\mu^2}+m(m+1)Z_m=0. \qquad (8)$$

Posons

$$Z_m=y_0+y_1(A^{(1)}\sin\varpi+B^{(1)}\cos\varpi)+y_2(A^{(2)}\sin 2\varpi+B^{(2)}\cos 2\varpi)\ldots\text{etc.}$$

le coefficient général y_n sera donné par l'équation

$$\frac{d.(1-\mu^2)\dfrac{dy_n}{d\mu}}{d\mu}+\left[m(m+1)-\frac{n^2}{1-\mu^2}\right]y_n=0.$$

Pour le développement le plus général de Z_m, il faudrait pouvoir supposer n purement algébrique dans cette équation ; mais nous n'avons pu intégrer qu'en le supposant un nombre entier, ce qui, du reste, n'influera en rien sur l'application que nous voulons faire au coefficient $T^{(m)}$ (*).

Faisons $y_n = (1-\mu^2)^{\frac{n}{2}} x_n$, il vient

$$(m-n)(m+n+1)x_n - 2(n+1)\mu \frac{dx_n}{d\mu} + 1-\mu^2 \frac{d^2x_n}{d\mu^2} = 0. \quad (9)$$

Si au contraire nous faisons $y_n = (1-\mu^2)^{-\frac{n}{2}} x_{-n}$, nous avons

$$(m+n)(m-n+1)x_{-n} - 2(n-1)\mu \frac{dx_{-n}}{d\mu} + (1-\mu^2) \frac{d^2x_{-n}}{d\mu^2} = 0. \quad (10)$$

Ces deux équations ne diffèrent que par le signe de n, ce qui tient à ce que ce signe est indifférent dans l'équation qu'on transforme. On aura

$$x_n = (1-\mu^2)^{-n} x_{-n}.$$

Les équations (9) et (10), différentiées p fois de suite et multipliées après la différentiation, la première par $(1-\mu^2)^{n+p}$, la seconde par $(1-\mu^2)^{p-n}$, donnent

$$(m-n-p)(m+n+p+1)(1-\mu^2)^{n+p} \frac{d^px_n}{d\mu^p}$$

$$+ \frac{d.(1-\mu^2)^{n+p+1} \frac{d^{p+1}x_n}{d\mu^{p+1}}}{d\mu} = 0, \quad (11)$$

$$(m+n-p)(m-n+p+1)(1-\mu^2)^{p-n} \frac{d^px_{-n}}{d\mu^p}$$

$$+ \frac{d.(1-\mu^2)^{p-n+1} \frac{d^{p+1}x_{-n}}{d\mu^{p+1}}}{d\mu} = 0. \quad (12)$$

Supposons d'abord $n < m$, ou tout au plus égal à m, et faisons $p = m-n$ dans l'équation (11), nous aurons

$$d.(1-\mu^2)^{m+1} \frac{d^{m-n+1}x_n}{d\mu^{m-n+1}} = 0;$$

(*) L'analyse qui va suivre avait été employée en très-grande partie dans un deuxième Mémoire de M. Ivory, sur l'attraction des sphéroïdes (Transactions philosophiques, tom. 102, année 1812, 1re partie) et dans la Section XI du troisième Supplément aux Exercices du Calcul intégral, par M. Legendre. Je ne connaissais aucun de ces ouvrages lorsque je fis mon travail.

d'où, par l'intégration, on tire

$$\frac{d^{m-n}x_n}{d\mu^{m-n}} = A + B\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)^{m+1}}.$$

Faisons maintenant $p=0$, $p=1,\ldots p=m-n-1$ dans la même équation; nous trouvons

$$(1-\mu^2)^n x_n = -\frac{d.(1-\mu^2)^{n+1}\frac{dx_n}{d\mu}}{d\mu}\times\frac{1}{(m-n)(m+n+1)},$$

$$(1-\mu^2)^{n+1}\frac{dx_n}{d\mu} = -\frac{d.(1-\mu^2)^{n+2}\frac{d^2x_n}{d\mu^2}}{d\mu^2}\times\frac{1}{(m-n-1)(m+n+2)},$$

etc....

$$(1-\mu^2)^{m-1}\frac{d^{m-n-1}.x_n}{d\mu^{m-n-1}} = -\frac{d.(1-\mu^2)^m\frac{d^{m-n}x_n}{d\mu^{m-n}}}{d\mu}\times\frac{1}{1.2m}.$$

Si l'on substitue l'expression du premier membre de la dernière équation dans le second membre de la précédente, et ainsi de suite jusqu'à la première équation, on trouve

$$x_n = \frac{d^{m-n}.(1-\mu^2)^m\frac{d^{m-n}x_n}{d\mu^{m-n}}}{(1-\mu^2)^n d\mu^{m-n}}\times\frac{(-1)^{m-n}}{1.2.3\ldots m-n.m+n+1\ldots 2m}.$$

Si dans cette expression l'on met pour $\frac{d^{m-n}.x_n}{d\mu^{m-n}}$ la valeur que nous en avons donnée plus haut, et qu'on change les constantes, on aura

$$x_n = \frac{d^{m-n}.(1-\mu^2)^m.\left(C+D\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)^{m+2}}\right)}{(1-\mu^2)^n d\mu^{m-n}}.$$

Cette expression, contenant deux constantes arbitraires, est précisément l'intégrale complète de l'équation (9); elle se compose d'une partie irrationnelle et d'une autre entière et rationnelle du degré $m-n$. Car il est facile de s'assurer, par la différentiation, que cette dérivée $\frac{d^{m-n}(1-\mu^2)^m}{d\mu^{m-n}}$ est exactement divisible par $(1-\mu^2)^n$.

11. Au lieu de faire $p=m-n$ dans l'équation (11), faisons $p=m+n$ dans l'équation (12); elle devient immédiatement

intégrable et donne

$$\frac{d^{m+n}x_{-n}}{d\mu^{m+n}} = E + G\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)^{m+1}}.$$

Faisons dans cette équation $p=0$, $p=1\ldots.p=m+n-1$; traitons les résultats comme ci-dessus, et nous en tirerons

$$x_n = (1-\mu^2)^n\frac{d^{m+n}.(1-\mu^2)^m\left[F+K\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)^{m+1}}\right]}{d\mu^{m+n}};$$

mais $x_n = (1-\mu^2)^{-n}x_{-n}$. On aura donc encore pour x_n cette expression, aussi générale que la première,

$$x_n = \frac{d^{m+n}.(1-\mu^2)^m\left[F+K\int\frac{d\mu}{(1-\mu^2)^{m+1}}\right]}{d\mu^{m+n}}.$$

Identifiant les parties entières et rationnelles, dans les deux expressions, et en déterminant les constantes pour que les premiers termes soient les mêmes, on a cette relation remarquable,

$$(-1)^n(m-n+1)(m-n+2)\ldots.(m+n)\frac{d^{m-n}.(1-\mu^2)^m}{d\mu^{m-n}}$$
$$= (1-\mu^2)^n\frac{d^{m+n}(1-\mu^2)^m}{d\mu^{m+n}}.$$

Supposons maintenant $n>m$; aucune valeur de p ne peut alors rendre l'équation (11) immédiatement intégrable; mais si dans l'équation (12) nous faisons $p=n-m-1$, que nous intégrions, etc.; enfin si nous traitons cette équation par un procédé pareil à celui que nous avons employé ci-dessus, nous trouverons

$$x_n = \frac{d^{n-m-1}.(1-\mu^2)^{-m-1}[H+L\int(1-\mu^2)^m d\mu]}{d\mu^{m-n-1}}.$$

Cette formule ne contient aucune partie entière et rationnelle, ainsi l'on ne doit pas supposer $n>m$, lorsqu'on ne veut pour x_n que des valeurs de cette espèce.

Nous aurons donc dans cette hypothèse, qui est la seule qui convienne pour la fonction $T^{(m)}$,

$$x_n = J\frac{d^{m+n}(1-\mu^2)^m}{d\mu^{m+n}},$$

et par suite,

$$y_n = J(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^{m+n}(1-\mu^2)^m}{d\mu^{m+n}},$$

J étant une constante; mais elle peut être censée comprise dans $A^{(n)}$ et $B^{(n)}$. Si nous posons $R_m = \frac{d^m(1-\mu^2)^m}{d\mu^m}$, nous aurons

$$(13) \quad Z_m = B^{(0)}R_m + (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dR_m}{d\mu}(A^{(1)}\sin\varpi + B^{(1)}\cos\varpi) + \text{etc}\ldots$$

$$+ (1-\mu^2)^{\frac{n}{2}} \frac{d^nR_m}{d\mu^n}(A^{(n)}\sin n\varpi + B^{(n)}\cos n\varpi),$$

$B^{(0)}$, $A^{(1)}$ $B^{(1)}$....$A^{(n)}$ $B^{(n)}$ étant des constantes arbitraires, au nombre de $2m+1$. Avec un peu d'attention, on voit que cette formule donne pour Z_m une fonction entière et rationnelle des trois quantités μ, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi$, la plus générale qui satisfasse à l'équation (8).

Réciproquement, toute fonction entière et rationnelle de ces trois quantités peut se développer en une suite de fonctions telles que Z_m. (Voyez la Mécanique Céleste.)

12. Pour déduire $T^{(m)}$ de l'expression générale (13), j'observe que $T^{(m)}$ doit être symétrique par rapport aux variables μ, μ', ϖ, ϖ', et ne doit contenir que les cosinus des multiples de $\varpi'-\varpi$. Si donc on fait R'_m égal à ce que devient R_m en accentuant μ, on aura d'abord

$$T^{(m)} = L_0R_mR'_m + L_1(1-\mu^2)^{\frac{1}{2}}(1-\mu'^2)^{\frac{1}{2}}\frac{dR_m}{d\mu}\frac{dR'_m}{d\mu'}\cos(\varpi'-\varpi)\ldots$$

$$+ L_n(1-\mu^2)^{\frac{n}{2}}(1-\mu'^2)^{\frac{n}{2}}\frac{d^nR_m}{d\mu^n}\frac{d^nR'_m}{d\mu'^n}\cos n(\varpi'-\varpi),$$

$L_0\, L_1 \ldots L_n$ étant des coefficiens numériques. Pour les déterminer, je suppose $\mu=\mu'$; alors le coefficient de $\cos n(\varpi'-\varpi)$ devient $L_n(1-\mu^2)^n\left(\frac{d^nR_m}{d\mu}\right)^2$. Le terme le plus élevé par rapport à μ, dans ce coefficient, est égal à

$$(-1)^nL_n(2m.2m-1\ldots\ldots m-n+1)\mu^{2m};$$

mais si $\mu=\mu'$, $T=\left\{1-4t[\mu^2\sin^2\tfrac{1}{2}(\varpi'-\varpi)+\tfrac{1}{2}\cos(\varpi'-\varpi)]+t^2\right\}^{-\frac{1}{2}}$, et il est aisé de s'assurer que dans $T^{(m)}$ le terme du plus haut exposant est

$$\frac{1.3.5\ldots2m-1}{2.4.6\ldots2m}\,2^{2m}\sin^{2m}\tfrac{1}{2}(\varpi'-\varpi).\mu^{2m}.$$

Or le coefficient de $\cos n(\varpi'-\varpi)$, dans le développement de $2^{2m}\sin^{2m}\frac{1}{2}(\varpi'-\varpi)$, est égal à

$$(-1)^n.2.\frac{2m.2m-1\ldots.m+n+1}{1.2.3\ldots.m-n};$$

en supprimant le facteur 2 pour $n=0$, on aura donc, par la comparaison,

$$L_n=\frac{2}{2^{2m}\times(1.2.3\ldots m)^2}\times m-n+1.m-n+2\ldots m+n.$$

De tout cela il résulte, en posant

$$M=\frac{d^{2m}(1-\mu^2)^m(1-\mu'^2)^m}{d\mu^m d\mu'^m}\times\frac{1}{2^{2m}.(1.2.3\ldots m)^2}\;\mu=\cos\theta\;\;\mu'=\cos\theta',$$

$$T^{(m)}=M+\frac{2\sin\theta\sin\theta'\cos(\varpi'-\varpi)}{m(m+1)}\,\frac{d^2M}{d\mu d\mu'}+\text{etc.}\ldots.$$
$$+\frac{2\sin^m\theta\sin^m\theta'\cos m(\varpi'-\varpi)}{1.2.3\ldots 2m}\,\frac{d^{2m}M}{d\mu^m d\mu'^m}.$$

La comparaison de cette formule avec le type général (15) donne

$$\left.\begin{aligned} B^{(0)}&=\frac{R'_m}{2^{2m}(1.2.3\ldots m)^2}\ldots\ldots\; B^{(n)}=\cos n\varpi\\ A^{(0)}&=0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; A^{(n)}=\sin n\varpi\end{aligned}\right\}$$

$$\times\frac{2(-\mu'^2)^{\frac{n}{2}}\dfrac{d^nR'_m}{d\mu'^n}}{2^{2m}(1.2.3\ldots m)^2(m-n+1)(m-n+2)\ldots(m+n)}.$$

13. L'équation (11) devient, en y faisant $n=0$, $x_0=R_m$,

$$(m-p)(m+p+1)(1-\mu^2)^p\,\frac{d^pR_m}{d\mu^p}+\frac{d.(1-\mu^2)^{p+1}\dfrac{d^{p+1}R_m}{d\mu^{p+1}}}{d\mu}=0;$$

changeant m en m', on aura cette autre :

$$(m'-p)(m'+p+1)(1-\mu^2)^p\,\frac{d^pR_{m'}}{d\mu^p}+\frac{d.(1-\mu^2)^{p+1}\dfrac{d^{p+1}R_{m'}}{d\mu^{p+1}}}{d\mu}=0,$$

Si nous multiplions la première par $\frac{d^pR_{m'}}{d\mu^p}$, et que nous inté-

grions ensuite depuis $\mu=-1$ jusqu'à $\mu=+1$, il viendra

$$(m-p)(m+p+1)\int(1-\mu^2)^p\frac{d^pR_m}{d\mu^p}\frac{d^pR_{m'}}{d\mu^p}d\mu$$
$$=\int(1-\mu^2)^{p+1}\frac{d^{p+1}R_m}{d\mu^{p+1}}\frac{d^{p+1}R_{m'}}{d\mu^{p+1}}d\mu.$$

La seconde équation, multipliée par $\frac{d^pR_m}{d\mu^p}$ et intégrée pareillement, fournira un résultat qui ne différera de celui-ci que par le signe de m. La comparaison de ces deux résultats donne, lorsque m et m' sont différens,

$$\int(1-\mu^2)^p\frac{d^pR_m}{d\mu^p}\frac{d^pR_{m'}}{d\mu^p}d\mu=0. \qquad (14)$$

Si $m=m'$, on a successivement, en faisant $p+1=n$,

$$\int(1-\mu^2)^n\left(\frac{d^nR_m}{d\mu^n}\right)^2d\mu$$
$$=(m+n)(m-n+1)\int(1-\mu^2)^{n-1}\left(\frac{d^{n-1}R_m}{d\mu^{n-1}}\right)^2d\mu,$$
$$\int(1-\mu^2)^{n-1}\left(\frac{d^{n-1}R_m}{d\mu^{n-1}}\right)^2d\mu$$
$$=(m+n-1)(m+n-2)\int(1-\mu^2)^{n-2}\left(\frac{d^{n-2}R_m}{d\mu^{n-2}}\right)^2d\mu,$$

etc....

$$\int(1-\mu^2)\left(\frac{dR_m}{d\mu}\right)^2d\mu=(m+1)m\int R^2_md\mu,$$

et de là,

$$\int(1-\mu^2)^n\left(\frac{d^nR_m}{d\mu^n}\right)^2d\mu=(m-n+1)(m-n+2)\ldots.m+n.\int R^2_md\mu.$$

Faisons $n=m$, on aura $\left(\frac{d^nR_m}{d\mu^n}\right)^2=(1.2.3....2m)^2$, et

$$\int R^2_md\mu=1.2.3....2m\int(1-\mu^2)^md\mu=\frac{2^{2m+1}\times(1.2....m)^2}{2m+1}:$$

d'où enfin

$$\int(1-\mu^2)^n\left(\frac{d^nR_m}{d\mu^n}\right)^2d\mu$$
$$=\frac{(m-n+1)(m-n+2)\ldots(m+n).(1.2.3\ldots m)^2\,2^{2m+1}}{2m+1}. \qquad (15)$$

Cela posé, considérons l'intégrale double $\int Z_m Y_{m'} d\mu d\varpi$, prise depuis $\mu = -1$ jusqu'à $\mu = +1$, et depuis $\varpi = 0$ jusqu'à $\varpi = 2\pi$, $Y_{m'}$ étant une fonction de même forme que Z_m, ensorte que

$$Y_{m'} = b^{(0)} R_{m'} + (1-\mu^2)^{\frac{1}{2}} \frac{dR_{m'}}{d\mu} (a^{(1)} \sin\varpi + b^{(1)} \cos\varpi) \text{ etc.} \ldots$$

Si l'on a égard aux théorèmes (14) et (15), et aux résultats suivans :

$$\int \sin p\varpi \sin q\varpi . d\varpi = 0,$$
$$\int \sin p\varpi \cos q\varpi . d\varpi = 0,$$
$$\int \sin p\varpi \cos p\varpi . d\varpi = 0,$$
$$\int \sin^2 p\varpi d\varpi = \int \cos^2 p\varpi d\varpi = \pi,$$
$$\int d\varpi = 2\pi,$$

on verra que si m et m' sont différens,

$$\int Z_m Y_{m'} d\mu d\varpi = 0, \quad \text{et par suite,} \quad \int Z_m d\mu d\varpi = 0,$$

et que si $m' = m$,

$$\int Z_m Y_m d\mu d\varpi = \frac{2^{2m+1}(1.2.3\ldots m)^2 \pi}{2m+1}$$
$$\times \Sigma(A^{(n)}a^{(n)} + B^{(n)}b^{(n)})(m-n+1.m-n+2\ldots m+n),$$

le signe Σ s'étendant depuis $n=0$ jusqu'à $n=m$, et le premier terme de la somme $A^{(0)}a^{(0)} + B^{(0)}b^{(0)}$ devant être remplacé par $2B^{(0)}b^{(0)}$.

Si $Z_m = T^{(m)}$ et qu'on substitue pour $B^{(n)}$ et $A^{(n)}$ leurs valeurs données plus haut, on trouve ce théorème bien remarquable,

$$\int T^{(m)} Y_m d\mu d\varpi = \frac{4\pi Y'_m}{2m+1},$$

Y'_m étant ce que devient Y_m en accentuant μ, ou bien,

$$\int T^{(m)} Y'_m d\mu' d\varpi' = \frac{4\pi Y_m}{2m+1}. \qquad (16)$$

Formules pour l'attraction des sphéroïdes infiniment peu différens d'une sphère.

14. Supposons d'abord le point attiré extérieur au sphéroïde, et ce sphéroïde homogène, faisons $\rho = 1$. Soit $r' = a(1+\alpha y')$ l'équation de sa surface, α étant un très-petit coefficient dont nous négligerons le carré. Cela posé, nous aurons la valeur de V par la série (4), dans laquelle

$$V^{(n)} = \int T^{(n)} r'^{n+2} dr' d\mu' d\varpi'.$$

Intégrant par rapport à r', depuis $r'=0$ jusqu'à $r'=a(1+\alpha y')$, on trouve

$$V^{(m)} = \int T^{(m)} a^{m+3}\left(\frac{1}{m+3}+\alpha y'\right)d\mu' d\varpi'.$$

Si $m=0$, $T^{(0)}=1$, $V^{(0)}=\frac{4}{3}\pi a^3 + a^3\alpha\int y' d\mu' d\varpi'$;

en général, $\int T^{(m)} d\mu' d\varpi' = 0$, et

$$V^{(m)} = a^{m+3}\alpha\int T^{(m)} y' d\mu' d\varpi'.$$

Faisons $Q_m = \int T^{(m)} y' d\mu' d\varpi'$, nous aurons

$$V^{(m)} = a^{m+3}\alpha Q_m.$$

y' ne contenant que μ' et ϖ', et $T^{(m)}$ étant une fonction entière et rationnelle des trois quantités μ, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\varpi$, Q'_m le sera de même et satisfera à l'équation (9).

De cette valeur générale de $V^{(m)}$, on tire

$$V = \frac{4}{3}\frac{\pi a^3}{r} + \frac{a^3\alpha}{r} Q_0 + \frac{a^4\alpha}{r^2} Q_1 \ldots + \frac{a^{m+3}\alpha}{r^{m+1}} Q_m$$

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\frac{\pi a^3}{r^2} + \frac{a^3\alpha}{r^2} Q_0 + \frac{2a^4\alpha}{r^3} Q_1 \ldots + \frac{\overline{m+1}\, a^{m+3}\alpha}{r^{m+2}} Q_m.$$

Le premier terme est, comme on voit, l'attraction d'une sphère d'un rayon égal à a, et les autres sont de l'ordre α. Les deux autres composantes de l'attraction du sphéroïde seraient aussi du même ordre, d'où il résulte qu'au carré près de α, toute l'attraction est exprimée $-\frac{dV}{dr}$.

Si le point attiré est à la surface du sphéroïde, alors $r=a(1+\alpha y)$, y étant ce que devient y' lorsqu'on y change μ' et ϖ' en μ et ϖ, et les formules sont alors

$$V = \frac{4}{3}\pi a^2(1-\alpha y) + a^2\alpha(Q_0 + Q_1 + Q_2 \ldots)$$

$$-\frac{dV}{dr} = \frac{4}{3}\pi a\,(1-2\alpha y) + a\alpha\,(Q_0 + 2Q_1 + 3Q_2 \ldots).$$

15. Traitons directement ce cas particulier. Nous avons

$$V=\int\frac{r'^2 dr' d\mu' d\varpi'}{u} \quad u^2=r^2-2rr'[\mu\mu'+\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varpi'-\varpi)]$$

$$-\frac{dV}{dr}=\int\frac{r'^2 dr' d\mu' d\varpi'}{u^3}[r-r'(\mu\mu'+\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varpi'-\varpi)].$$

On tire de ces expressions,

$$-2r\frac{dV}{dr}-V=\int\frac{r'^2dr'd\mu'd\varpi'}{u^3}(r^2-r'^2).$$

Cette intégrale doit être prise depuis $r'=0$ jusqu'à $r'=a$, et ensuite depuis $r'=a$ jusqu'à $r'=a(1+\alpha y')$. La première intégration suppose α nul; mais alors $V=\frac{4}{3}\frac{\pi a^3}{r}-\frac{dV}{dr}=\frac{4}{3}\frac{\pi a^3}{r}$, ensorte que la première partie de l'intégrale est égale à $\frac{4}{3}\frac{\pi a^3}{r}$.

Le reste de l'autre est égal, aux infiniment petits près de l'ordre α^2, à $a^3(r^2-a^2)\alpha\int\frac{y'd\mu'd\varpi'}{u^3}$.

En prenant le rayon r pour origine des μ', on a $u^2=a^2-2\mu'ar+r^2$, et

$$\int\frac{y'd\mu'd\varpi'}{u^3}=\int\frac{y'd\mu'd\varpi'}{(a^2-2ar\mu'+r^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Posons $a=rt$, $t<1$, le reste de l'intégrale cherchée sera

$$a^2\alpha t(1-t^2)\int\frac{y'd\mu'd\varpi'}{(1-2t\mu'+t^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Or $t=1$, aux quantités près de l'ordre α, de sorte que cette quantité sera évidemment du premier ordre en α, tant que μ' sera sensiblement différent de 1, ou, ce qui revient au même, tant que y' différera sensiblement de y. Nous pouvons donc supposer toujours $y'=y$; mais alors

$$\frac{(1-t^2)}{t}\int\frac{d\mu'd\varpi'}{(1-2t\mu'+t^2)^{\frac{3}{2}}}=4\pi;$$

on aura donc $$-2r\frac{dV}{dr}=V+\frac{4}{3}\frac{\pi a^3}{r}+4\pi a^2\alpha y.$$

Mettant pour r sa valeur $a(1+\alpha y)$, et observant que...... $-\frac{dV}{dr}=\frac{4}{3}\pi a^2$, aux quantités près de l'ordre α, on trouve

$$-\frac{dV}{ar}=\frac{V}{2a}+\frac{2}{3}\pi a.$$

Substituant dans cette équation les valeurs de V et de $-\frac{dV}{dr}$ données plus haut, on en tire

$$4\pi y=Q_0+3Q_1+5Q_2+\text{etc.....}(2m+1)Q_m\ldots.$$

Ainsi y se trouve essentiellement développé en une série de la forme $$y=Y^0+Y_1+Y_2,$$

Y_m étant une fonction entière et rationnelle des trois quantités μ, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\varpi$, $\sqrt{1-\mu^2}$ satisfaisant à l'équation (9). Mais alors on a $Q_m = \int T^{(m)} y' d\mu' d\varpi' = \frac{4\pi Y_m}{2m+1}$; et comme, par ce que nous avons vu sur les fonctions telles que $T^{(m)} Y_m$,

$$\int T^{(m)} Y'_{m'} d\mu' d\varpi' = 0,$$

il en résulte $\int T^{(m)} Y'_m d\mu' d\varpi' = \frac{4\pi Y_m}{2m+1}$, ce qui confirme le théorème (16).

Les valeurs de V et de $-\frac{dV}{dr}$, peuvent donc s'écrire ainsi :

$$V = \tfrac{4}{3}\frac{\pi a^3}{r} + 4\frac{\pi a^3 \alpha}{r}\left[Y_0 + \frac{aY_1}{3r} + \frac{a^2 Y_2}{5r^2} \cdots \frac{a^m Y_m}{2m+1 \cdot r^m} \cdots\right]$$

$$-\frac{dV}{dr} = \tfrac{4}{3}\frac{\pi a^3}{r^2} + 4\frac{\pi a^3 \alpha}{r^2}\left[Y_0 + \frac{2aY_1}{3r} + \frac{3a^2 Y_2}{5r^2} \cdots \frac{m+1}{2m+1}\frac{a^m Y_m}{r^m}\right].$$

En prenant pour a le rayon de la sphère égale en solidité au sphéroïde, et pour origine son centre de gravité, Y_0 et Y_1 sont nuls. (Mécanique Céleste.)

Lorsqu'on connaîtra d'avance le développement de y, ces formules seront employables immédiatement. Mais dans le cas contraire, elles n'auront aucun avantage sur les précédentes, puisqu'on ne pourra calculer Y_0, Y_1, etc. que par les intégrales doubles $\int T^{(m)} y' d\mu' d\varpi'$, etc.

Je termine ici mon Mémoire ; tout ce qui reste à dire se trouve dans la Mécanique Céleste, et je n'aurais rien à y changer ; je me bornerai seulement aux observations suivantes.

Les séries (4) et (5) peuvent s'appliquer à des corps quelconques et fournir une théorie de leurs attractions, *pourvu* qu'elles ne cessent pas d'être convergentes, et j'ai montré en quoi consistait leur convergence ou leur divergence. On trouve dans la Mécanique Céleste deux théorèmes généraux, l'un sur les solides de révolution, l'autre sur les solides symétriques, par rapport à trois axes, basés sur la considération de ces séries et sur les propriétés des fonctions Z_m relatives aux intégrales doubles. Pour que ces théorèmes soient certains, il faut ne les appliquer qu'à des corps pour lesquels les séries employées soient essentiellement convergentes, et de plus, qu'à des corps continus ; car les propriétés des fonctions Z_m relatives aux intégrales doubles, supposent les intégrales prises dans toute l'étendue des variables μ' et ϖ', ce qui ne pourrait plus avoir lieu si la forme du rayon changeait brusquement dans l'intervalle des limites de ces variables.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE.

Note sur les tangentes aux sections planes de la surface engendrée par une ligne droite; par M. Hachette.

J'ai démontré, dans le Supplément de la Géométrie descriptive de Monge (pag. 50, art. 58 et 59), que la surface la plus générale engendrée par la ligne droite, était touchée, suivant une génératrice, par une surface du même genre, que nous avons nommée *hyperboloïde à une nappe*, et qui jouit de cette propriété, qu'elle peut être engendrée par une ligne droite, de deux manières différentes, ensorte que le plan qui touche cette surface en un point, est déterminé par les deux droites qui se croisent en ce point. J'ai fait voir qu'on pouvait prendre pour directrices de la génératrice de l'hyperboloïde, trois droites menées dans les plans qui touchent la surface générale en trois points quelconques de la génératrice commune aux deux surfaces. Si l'on considère le point de cette génératrice qui appartient à une section plane de la surface générale, la tangente en ce point de la section, est évidemment la droite d'intersection du plan de la section et du plan tangent à l'hyperboloïde. Les droites directrices de la génératrice de l'hyperboloïde étant seulement assujéties aux conditions de passer par trois points en ligne droite de la surface générale, et d'être menées dans les plans tangens en ces mêmes points, l'objet de cette note est de faire remarquer qu'on peut prendre pour les directrices, des droites parallèles au plan de la section de la surface générale; alors l'hyperboloïde à une nappe devient le paraboloïde hyperbolique, et la tangente à la section est nécessairement une droite de ce paraboloïde. On déduit de cette considération un moyen très-simple de mener les tangentes aux sections planes de plusieurs surfaces gauches employées dans la coupe des pierres, et notamment de celle qu'on engendre en prenant pour directrices de la droite mobile, deux cercles situés dans des plans parallèles, et une perpendiculaire à ces plans. Les petites voûtes qu'on nomme *biais passé*, *arrière-voussure de Marseille*, sont terminées par une surface de ce genre, dont les sections verticales forment les têtes de quelques-uns de leurs voussoirs. On construira facilement les tangentes de ces sections, par la méthode que nous venons d'indiquer, et qui se réduit à trouver une seule position de la génératrice du paraboloïde tangent à la surface gauche, qui termine la voûte.

Recherches sur un Jeu de combinaisons ; par C. J. Brianchon, *Capitaine d'artillerie, Adjoint au Directeur-général des manufactures d'armes.*

(Art. 1.) Les n billets, ou numéros, A, E, I, O,....U, dont se compose une loterie, étant tirés secrètement, et au hasard, par une société de n personnes, qui, chacune, en prennent un : nous allons faire voir par quel artifice on peut obtenir une certaine *donnée*, qui, seule, décèle tout le mystère de cette répartition et permet d'assigner ce qui est échu à chacun.

(Art. 2.)

Donnez à la	1re 2e ... ne	personne	J' J'' ... J^n	jetons; et, en outre, mettez-en à la disposition de toutes une quantité suffisante D ; ensuite de quoi, vous expliquerez aux actionnaires que celui qui recèle le billet numéroté	A E ... U	doit prendre au tas D, et à votre insu,	K' K'' .... K^n	fois autant de jetons qu'il en a déjà reçus.

Après cette dernière opération, faite en votre absence, vous trouvez que, des D jetons que vous aviez laissés, il n'en reste plus que d. La connaissance seule de ce nombre d va nous conduire à la solution du problème.

3. En effet : le produit $1\times2\times3.....\times n=m$, exprimant de combien de manières différentes on peut distribuer n choses entre n individus, $D-d$ n'est susceptible que de m valeurs dont on figurera le tableau en parcourant successivement tous les changemens d'ordre que peuvent subir les billets entre les sociétaires. Ainsi, la première de ces valeurs étant

$$K'J'+K''J''+.....+K^nJ^n,$$

on formera les $m-1$ autres en laissant à leurs places les coefficiens K, et en permutant les lettres J jusqu'à ce qu'on ait épuisé tous les arrangemens qu'elles peuvent avoir ; d'où l'on voit que chaque expression algébrique de $D-d$ se composera de la somme des n coefficiens K, ordonnés selon leurs accens, et multipliés, chacun, par l'un des termes J. Ce tableau, que, pour abréger, nous désignerons par T, indiquera, d'une part, tous les cas possibles de la répartition des n numéros ; de l'autre, il exprimera les relations qui lient la variable d aux constantes J, K, D.

Or, comme on est maître de ces dernières, on les choisira telles, que de toutes les valeurs résultantes de $D-d$, il n'y en ait pas deux qui soient numériquement égales. Par ce moyen, aussitôt qu'on sait quelle est la quantité d de jetons restans,

il suffit de jeter les yeux sur la formule T pour conclure quelle est la disposition des billets à l'égard des personnes.

4. Voici maintenant une méthode pour faire ce choix convenable des constantes.

Si l'on prend deux à deux toutes les expressions de $D-d$, en les soustrayant l'une de l'autre, on obtiendra $\frac{m(m-1)}{2}$ différences dont aucune ne devra s'annuler lorsqu'on y remplacera les signes J et K par les nombres qu'ils représentent, et toute hypothèse qui ferait évanouir une seule de ces différences ne serait pas admissible.

Donc, si l'on égale à zéro toutes les différences ainsi formées, et qu'on traite séparément chacune des équations résultantes, en y regardant comme variables celles des inconnues J et K qu'elle contient, l'ensemble de toutes les racines entières et positives de ces équations individuelles fera connaître les séries de nombres qu'il faut exclure dans les suppositions à faire sur ces inconnues. La difficulté se trouve ainsi ramenée à une discussion régulière d'analyse indéterminée.

5. Tout étant symétrique en J et K, lorsqu'on aura fixé les nombres $\frac{J}{K}$, on sera maître d'intervertir l'ordre des termes de chacune de ces deux suites, ou même de les substituer l'une à l'autre, sans que, pour cela, elles cessent d'être applicables, et sans qu'aucune des équations soit vérifiée.

6. Parmi ces équations, il s'en trouve de la forme $(J^{\alpha}-J^{\zeta})(K^{\gamma}-K^{\delta})=0$, et celles-là sont en nombre $\left[\frac{n(n-1)}{2}\right]^2$; elles n'apprennent rien sur les valeurs absolues des quantités cherchées, mais elles montrent qu'on ne peut résoudre la question qu'en prenant les n termes $\frac{J}{K}$ tels qu'il n'y en ait pas deux qui soient égaux.

7. Telles sont les conditions générales auxquelles sont assujetties les $2n$ constantes J, K. Quant à D, qui du reste est arbitraire, il est évident que, pour chaque solution, il doit être au moins égal à la plus grande des valeurs numériques de $D-d$.

8. On peut égaler à zéro l'un des termes J, et en même tems l'un de ceux K, sans que T perde la propriété d'indiquer les arrangemens qui répondent aux valeurs données de $D-d$. Il est aisé de se rendre compte de ce fait en observant que, dès qu'on connaît les lots de $n-1$ actionnaires, on

les rangs de $n-1$ billets, il n'y a plus d'incertitude sur le sort du $n^{ème}$.

9. La manière dont sont composées les équations mentionnées ci-dessus, montre, d'une part, que, si on veut limiter la multitude des solutions que comporte le problème, on peut disposer à volonté de tous les termes de l'un des systèmes $\frac{J}{K}$, en s'astreignant toutefois à les prendre différens entr'eux (§ 6); de l'autre, elle fait voir que si, à l'un de ces systèmes, on substitue, dans un ordre quelconque, les termes consécutifs d'une progression par différence, le nombre des équations se réduit à moitié. Nous remplacerons donc chaque coefficient K par l'un des n termes de cette progression

$$0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\ldots\ldots n-1\,;$$

toutes les équations s'abaissent alors d'un degré et deviennent linéaires.

10. Reste à statuer sur les quantités J, dont deux quelconques, J' et J'', par exemple, sont arbitraires, mais qui, toutes, doivent être distinctes (§ 6); les limites inférieures des $n-2$ autres sont des fonctions de n; et on en facilite beaucoup la recherche en supposant d'abord que, dans chaque système $\frac{J}{K}$, les lettres affectées des plus forts exposans représentent les plus grands nombres. D'après cette convention, faisant $J'=0$ (§ 8), $J''=1$, on reconnaît que, de toutes les valeurs de J''' qu'il faut exclure, la plus haute est donnée par l'équation

$$J'(K''-K^{n})+J''(K^{n}-K')+J'''(K'-K'')=0,$$

dont la racine est $n-1$. Donc $J'''=n$ est admissible.

De même, la limite inférieure de J^{iv} se tire de

$$J'(K'-K^{n})+J''(K'''-K'')+J'''(K^{n}-K')+J^{iv}(K''-K''')=0,$$

dont la racine est $1+n(n-1)$; d'où $J^{iv}=2+n(n-1)$.

En poursuivant, on trouve que

$$J'(K'-K^{n})+J''(K''-K''')+J'''(K^{iv}-K'')+J^{iv}(K^{n}-K')$$
$$+J^{v}(K'''-K^{iv})=0$$

conduit à $J^{v}=2n+(n-1)[2+n(n-1)]$, et

$$J'(K'-K^{n})+J''(K''-K''')+J'''(K'''-K'')+J^{iv}(K^{v}-K^{iv})$$
$$+J^{v}(K^{n}-K')+J^{vi}(K^{iv}-K^{v})=0$$

à $J^{vi}=n+2+n(n-1)+(n-1)\{2n+(n-1)[2+n(n-1)]\}$.

Ainsi des autres.

11. En adoptant ainsi une solution particulière, le tableau T peut être réduit au système des permutations des numéros, disposées selon la progression des valeurs de d, avec lesquelles elles sont appariées. Ces deux suites conjuguées, dont l'une est littérale et l'autre numérique, retraceront au premier coup d'œil toutes les circonstances du tirage des billets.

Et, puisqu'il suffit de connaître les lots de $n-1$ partenaires, on pourra supprimer la dernière lettre de chacun des groupes de la première série, qui, ne présentant plus alors que l'ensemble des combinaisons $n-1$ à $n-1$ des n numéros, donnera tous les arrangemens que peuvent prendre les billets à l'égard des $n-1$ premières personnes.

Nous allons appliquer cette théorie à quelques exemples qui fourniront autant de théorèmes particuliers propres à faire découvrir, par une seule interrogation, comment 3, 4, 5,..... choses quelconques ont été réparties entre 3, 4, 5, ... personnes, respectivement.

(Art. 12.)

Pour $n=3$, le système $\left|\begin{matrix} J \\ K \end{matrix}\right.$ est représenté par la série $\left|\begin{matrix} 0,\ 1,\ 3. \\ 0,\ 1,\ 2. \end{matrix}\right.$

Et, comme on est maître de transposer les termes (§ 5), nous prendrons

$$J'=1,\ J''=3,\ J'''=0,\quad \text{et},\quad K'=1,\ K''=2,\ K'''=0.$$

Le *maximum* de $D-d$ est alors égal à 7. Posant donc $D=8$ (§ 7), il vient, pour les six valeurs de d, classées par ordre de grandeur,

$$1,\quad 2,\quad 3,\quad 5,\quad 6,\quad 7,$$

et les combinaisons des trois billets, pris deux à deux (§ 11), sont respectivement

AE, IE, EA, IA, EI, AI;

d'où l'on tire cette règle : « Pour deviner comment trois numé-
» ros, A, E, I, ou trois objets quelconques, ont été distri-
» bués à trois individus,

» après » avoir » donné » au	1er 2e 3e	action-naire	1 3 0	cartes, ou jetons; déposez-en 8 autres, en prescrivant que celui qui a le billet	A E I	prenne à ce dépôt, et sans que vous soyez témoin	1 2 0	fois autant de jetons qu'il en a déjà reçus.

» Cela fait, demandez ce qu'il reste des huit jetons; le nombre

» qu'on accusera étant nécessairement un de ceux que renferme *T*, » cherchez au tableau la permutation correspondante, et vous » saurez quel numéro chacun a pris. »

Je suppose qu'il reste cinq jetons. Le groupe IA placé, dans l'index *T*, en regard du nombre 5, m'apprend que, dans ce cas, les billets I, A sont tombés en partage aux première et deuxième personnes, respectivement.

Cette récréation mathématique est connue sous le nom de *Tour des trois bijoux*. On peut en varier l'exécution d'une infinité de manières, en modifiant convenablement les nombres *J*, *K*, *D*.

Pour jeter plus de merveilleux sur cette ingénieuse divination, et aussi pour soulager la mémoire, on a imaginé de lier les six couples de voyelles

AE IE EA IA EI AI

par ce vers hexamètre :

L'ART DE LIRE CELA DIRA CE QU'IL A PRIS,

scandé par la série :

1 2 3 5 6 7.

Cet artifice de Mnémonique réduit le tableau à une formule mentale qui ne laisse aucune prise à la pénétration des spectateurs.

(Art. 13.)

$n = 4$, série $\left| \begin{array}{l} J\ldots 0,\ 1,\ 4,\ 14 \\ K\ldots 0,\ 1,\ 2,\ 3 \end{array} \right.$ $D = 52.$ $\begin{array}{l} J' = 1,\ J'' = 4,\ J''' = 14,\ J^{IV} = 0 \\ K' = 1,\ K'' = 2,\ K''' = 3,\ K^{IV} = 0 \end{array}$

T.

1	2	4	6	8	9	11	12
AEI,	OEI,	EAI,	OAI,	EOI,	AOI,	AIE,	OIE,
17	20	21	23	24	26	27	30
IAE,	OAE,	IOE,	AOE,	EIA,	OIA,	IEA,	OEA,
35	36	38	39	41	43	45	46
IOA,	EOA,	EIO,	AIO,	IEO,	AEO,	IAO,	EAO,

Que, par exemple, 17 soit le nombre de jetons restans : le groupe IAE dénote que, dans ce cas, les numéros I, A, E sont échus aux première, deuxième et troisième personnes, respectivement.

(Art. 14.)

$n = 5$, système $\left| \begin{array}{l} J\ldots 0,1,5,22,98. \\ K\ldots 0,1,2,\ 3,\ 4. \end{array} \right.$ $D=470.$ $\begin{array}{l} J' = 1,\ J'' = 5,\ J''' = 22,\ J^{IV} = 98,\ J^{V} = 0 \\ K' = 1,\ K'' = 2,\ K''' = 3,\ K^{IV} = 4,\ K^{V} = 0 \end{array}$

T.

1	2	5	7	10	11	18	19
AEIO,	UEIO,	EAIO,	UAIO,	EUIO,	AUIO,	AIEO,	UIEO,
26	29	31	33	39	41	43	46
IAEO,	UAEO,	IUEO,	AUEO,	EIAO,	UIAO,	IEAO,	UEAO,
53	54	61	62	65	67	70	71
IUAO,	EUAO,	EIUO,	AIUO,	IEUO,	AEUO,	IAUO,	EAUO,
77	78	81	83	86	87	111	112
AEOI,	UEOI,	EAOI,	UAOI,	EUOI,	AUOI,	AOEI,	UOEI,
123	127	128	131	132	134	140	144
OAEI,	UAEI,	OUEI,	AUEI,	EOAI,	UOAI,	OEAI,	UEAI,
150	152	154	155	162	165	167	169
OUAI,	EUAI,	EOUI,	AOUI,	OEUI,	AEUI,	OAUI,	EAUI,
170	171	178	181	183	185	187	188
AIOE,	UIOE,	IAOE,	UAOE,	IUOE,	AUOE,	AOIE,	UOIE,
199	203	204	207	229	232	233	237
OAIE,	UAIE,	OUIE,	AUIE,	IOAE,	UOAE,	OIAE,	UIAE,
248	249	251	253	255	258	265	266
OUAE,	IUAE,	IOUE,	AOUE,	OIUE,	AIUE,	OAUE,	IAUE,
267	269	271	274	281	282	284	286
EIOA,	UIOA,	IEOA,	UEOA,	IUOA,	EUOA,	EOIA,	UOIA,
292	296	302	304	305	308	309	313
OEIA,	UEIA,	OUIA,	EUIA,	IOEA,	UOEA,	OIEA,	UIEA,
324	325	349	350	353	355	358	359
OUEA,	IUEA,	IOUA,	EOUA,	OIUA,	EIUA,	OEUA,	IEUA,
365	366	369	371	374	375	382	383
EIOU,	AIOU,	IEOU,	AEOU,	IAOU,	EAOU,	EOIU,	AOIU,
390	393	395	397	403	405	407	410
OEIU,	AEIU,	OAIU,	EAIU,	IOEU,	AOEU,	OIEU,	AIEU,
417	418	425	426	429	431	434	435
OAEU,	IAEU,	IOAU,	EOAU,	OIAU,	EIAU,	OEAU,	IEAU.

Prenons que, des 470 jetons, il n'en reste que 87; les billets A, U, O, I sont alors entre les mains des première, deuxième, troisième et quatrième personnes, respectivement; conséquemment, la cinquième est en possession du billet E.

15. La personne qui exécute le tour doit être secrètement munie du tableau T, qui est la clef de l'opération. Il est facile de donner à ce tableau une forme telle qu'on puisse le consulter ostensiblement sans que l'assemblée en découvre le sens. Dans tous les cas, une seule interrogation fera discerner l'arrangement de billets qui a eu lieu.

Au-delà de cinq numéros, la complication des calculs rendrait impraticable ce jeu de combinaison. Telle sera donc la limite de nos recherches. Il nous suffit d'avoir prouvé que, pour toutes les valeurs de n, la difficulté est accessible et résoluble; ensorte que, par exemple, pour $n = 12$, au milieu de plus de quatre cent millions d'événemens, tous également possibles, on démêlera le véritable, à l'aide seulement du nombre d, qui est l'unique donnée du problème.

GÉOMÉTRIE.

Théorème. Si l'on construit la développante d'un arc de cercle, puis la développante de cette développante, et ainsi de suite ; la série infinie, composée de l'arc de cercle et de ses développantes successives, peut être sommée par un arc fini de spirale logarithmique.

Démonstration. Soient t et u les coordonnées polaires d'un point de la spirale logarithmique dont l'équation est $t = l.u$, ou $u = e^t$, t étant un arc du rayon 1, u le rayon vecteur correspondant à t, et e la base des logarithmes Nepériens. On a pour l'équation différentielle de la spirale :

$$\frac{udt}{du} = 1,$$

et pour l'élément de cette courbe,

$$\sqrt{u^2dt^2 + du^2}, \quad \text{ou} \quad du\sqrt{2},$$

dont l'intégrale est $u\sqrt{2}$ + const. Quand l'arc de spirale est nul, $u = 1$, et le rayon de courbure $= \sqrt{2}$. (*Voyez* le Traité du grand Calcul différentiel de M. Lacroix, page 483, et l'article de M. Poinsot, page 131 de ce volume de la Correspondance). D'où il suit que la constante égale $-\sqrt{2}$, et que l'arc fini de spirale logarithmique correspondant à l'arc de cercle t, est

$$(u - 1)\sqrt{2}, \quad \text{ou} \quad (e^t - 1)\sqrt{2}.$$

Mais on sait (Voyez l'article de M. Poinsot, page 245 du premier volume de la Correspondance) qu'en nommant t un arc de cercle du rayon 1 ; t', t'', t'''.... les développantes successives, on a

$$t + t' + t'' + t'''\ldots\ldots + \text{etc.} = e^t - 1;$$

d'où il suit que cette somme est égale au quotient qu'on obtient en divisant par $\sqrt{2}$, ou par le rayon de courbure de la spirale qui correspond au rayon vecteur 1, l'arc de spirale logarithmique compris entre les rayons vecteurs qui passent par les extrémités de l'arc de cercle t. (*Cet article est extrait d'un Mémoire de M. Dubois-Aimé, ancien élève, membre de la Commission d'Egypte.*)

Théorème. Si, par un point donné, on mène trois plans perpendiculaires entr'eux, qui coupent la surface d'une sphère, la somme des aires des trois sections circulaires sera constante, quelle que soit la position des plans coupans.

Démonstration. Soient x', y', z' les coordonnées du point donné rapportées à trois plans rectangulaires parallèles aux trois plans coupans, et $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ l'équation de la sphère; les équations des plans coupans seront

$$x = x', \quad y = y', \quad z = z'.$$

Les rayons r, r', r'' des sections circulaires ont pour expressions:

$$r' = \sqrt{R^2 - x'^2}, \quad r'' = \sqrt{R^2 - y'^2}, \quad r''' = \sqrt{R^2 - z'^2},$$

la somme des aires est, en appelant π le rapport de la circonférence au diamètre,

$$\pi(r^2 + r'^2 + r''^2), \text{ ou } \pi[3R^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)],$$

quantité constante qui exprime l'aire d'un cercle dont le rayon est

$$\sqrt{3R^2 - (x'^2 + y'^2 + z'^2)}.$$

(*Ce théorème est extrait de la Géométrie de position*, *pag.* 167.)

Propriétés des surfaces du second degré; par M. Fregier, *ancien élève.*

M. Fregier résout d'abord ce problème :

« Avec une équerre pour tout instrument, mener une tan-
» gente à une section conique, par un point pris sur la courbe. »

Il fait passer par le point de contact deux droites quelconques perpendiculaires entr'elles, et il suppose que le point de contact étant fixe, les deux droites tournent autour de ce point; chaque couple de droites rencontre la courbe en deux points, par lesquels on mène une corde. On prouve que, *toutes les cordes déterminées de la même manière, viennent se couper en un seul point qui est sur la normale.* La normale étant connue, la tangente l'est aussi.

Cette proposition a son analogue pour les surfaces du second degré, ce qui donne lieu au théorème suivant :

Trois droites rectangulaires se meuvent dans une surface du second degré, en se coupant toujours sur un point fixe de cette surface; *les plans menés par les intersections déterminées sur la même surface par chaque système de droites rectangulaires, viennent concourir en un point;* le sommet du cône circonscrit suivant la courbe déterminée par chacun de ces plans, engendre une surface plane.

M. de Stainville, Répétiteur-Adjoint à l'Ecole Polytechnique, et M. Lambert, Professeur de Mathématiques au Lycée de Bourges, ont envoyé plusieurs articles intéressans, qui ne pourront paraître que dans les prochains cahiers de la Correspondance.

§ II. SCIENCES PHYSIQUES.

Rapport fait à l'Institut, par M. Poisson, sur un Mémoire de M. Hachette, *relatif à l'écoulement des fluides par des orifices en minces parois, et par des ajutages appliqués à ces orifices.*

Le travail de M. Hachette peut être divisé en trois parties : l'une a pour objet de mesurer la contraction de la veine fluide dans le cas d'une mince paroi; l'autre traite de la cause des singuliers phénomènes que présentent les ajutages cylindriques ou coniques; enfin dans la troisième, l'auteur décrit la figure de la veine fluide, et les variations qu'elle éprouve pour différentes formes de l'orifice. Nous ne nous arrêterons pas à faire sentir toute l'importance de ces diverses questions, soit dans la pratique, soit par rapport à la théorie de l'écoulement des fluides; et sans autre préambule, nous allons analyser successivement les trois parties du Mémoire que la Classe a renvoyé à notre examen.

PREMIÈRE PARTIE. *Contraction de la Veine fluide.*

L'auteur examine d'abord si la figure de l'orifice en mince paroi influe sur la quantité de l'écoulement en un tems donné. C'est un principe généralement admis qu'à pression égale et l'aire de l'orifice restant la même, la dépense ne varie pas. M. Hachette en vérifie l'exactitude dans le cas où l'orifice est circulaire, triangulaire, elliptique, ou formé d'un arc de cercle et de deux lignes droites; mais il trouve des produits très-différens en plus ou en moins, lorsque le contour de l'orifice présente des angles rentrans; ce qui apporte une modification importante au principe que nous citons. Il considère ensuite d'une manière spéciale, le cas d'un orifice circulaire. Si le plan dans lequel il est percé n'est pas horizontal, la veine fluide forme une courbe qui doit être une parabole, correspondante à une certaine vitesse initiale que l'auteur a déterminée par des mesures directes. A partir de l'endroit de la plus grande contraction, l'épaisseur devient constante dans une grande étendue, c'est-à-dire jusqu'à ce que le jet, en se mêlant à l'air, finisse par se déformer; dans cette étendue les molécules fluides décrivent toutes la même courbe, et la veine ressemble à un cristal parfaitement pur que l'on croirait immobile : il a donc été facile de mesurer les abscisses et les ordonnées de différens points d'un même filet, et par la comparaison de ces mesures, l'auteur a reconnu que la courbe fluide ne s'écarte pas

sensiblement de la parabole. Il en a également conclu par les formules connues du mouvement parabolique, la vitesse du fluide en un point déterminé, par exemple, à l'endroit de la plus grande contraction. Il a trouvé, de cette manière, que la vitesse commune à tous les points de la section contractée, est, à très-peu près, la vitesse due à la hauteur du niveau du fluide au-dessus de l'orifice. Ainsi le théorème de Toricelli est exact quand on le rapporte à la vitesse qui a lieu à cette section de la veine; mais il ne saurait être vrai, en même tems, par rapport à la vitesse moyenne des molécules qui traversent la section de l'orifice, à cause de la différence entre les aires de ces deux sections.

La vitesse à la section contractée étant connue, l'observation de la dépense, en un tems donné, fera aussi connaître le rapport de cette section à celle de l'orifice, ou ce qu'on appelle la *quantité de la contraction*, plus exactement que par des mesures directes. On comptera le tems et on mesurera le produit de l'écoulement, par un petit orifice et sous une pression constante; on calculera en même tems par la règle de Toricelli la quantité d'eau qui devrait être fournie par cet orifice; le rapport de la dépense observée à la dépense calculée, sera une fraction qui exprimera la quantité de la contraction. Cette méthode prescrite par D. Bernoulli, est celle que M. Hachette a suivie. Il n'a négligé d'ailleurs aucune des précautions nécessaires pour atténuer les erreurs des observations; il a mesuré le tems au moyen d'une montre à secondes de M. Breguet; les orifices qu'il a employés ont été exécutés et mesurés par M. Lenoir; par l'inspection d'un tube communiquant, il s'est toujours assuré que le niveau du fluide ne variait pas pendant toute la durée de chaque expérience; enfin ses expériences ont été faites très en grand, soit par rapport aux dimensions de la cuve et au volume d'eau qui s'en écoule, soit par rapport au tems de l'écoulement qui a duré quelquefois plus d'une heure: un tableau placé à la fin de son Mémoire présente les resultats de 28 expériences faites de cette manière, sur des hauteurs d'eau comprises entre 135 et 888 millimètres, et pour des orifices dont les diamètres varient depuis 1 jusqu'à 41,3 millim. La moindre contraction observée par l'auteur répond au plus petit diamètre; elle est de 0,78. Pour les diamètres au-dessus de 10^{mm}, la contraction devient presque constante; elle reste comprise entre 0,60 et 0,63. A égalité d'orifice, elle augmente un peu avec la hauteur du fluide, et au contraire il ne paraît pas qu'elle dépende de la direction du jet.

Les autres physiciens qui ont déterminé la contraction de la veine, diffèrent sensiblement entr'eux sur sa grandeur; Newton, par exemple, l'évalue à 0,70; Borda a trouvé 0,61, et dans un

certain cas, il a vu l'aire de la veine contractée, se réduire à près de moitié de l'aire de l'orifice. Sans doute cette discordance entre de si habiles observateurs doit être attribuée en partie aux grandeurs des orifices et des pressions qu'ils ont employés; mais M. Hachette indique une autre cause que D. Bernoulli avait déjà aperçue, et qui doit avoir une influence notable sur la quantité de la contraction déduite de la dépense observée. Cette cause est la forme de la surface dans laquelle l'orifice est percé : selon M. Hachette, la dépense est la plus petite, toutes choses d'ailleurs égales, lorsque la paroi en contact avec le fluide est convexe; la dépense augmente quand la paroi devient plane, et elle augmente encore, si la paroi se change en une surface concave. Ainsi, il a remarqué que la dépense varie de près d'un 20e, en retournant simplement le disque de cuivre sur lequel est percé l'orifice circulaire en mince paroi, et qui est plan d'un côté et un peu concave de l'autre.

M. Hachette se propose de continuer ses expériences sur l'écoulement des fluides par de petits orifices, en variant toutes les circonstances qui peuvent influer sur la dépense en un tems donné, et en cherchant à découvrir les lois de leur influence. Il se propose aussi de les étendre aux vases cylindriques qui se vident par de grands orifices horizontaux; alors le tems de l'écoulement ne peut plus être déterminé par le théorème de Toricelli qui suppose l'orifice très-petit : son expression rigoureuse dépend, dans chaque cas, de deux transcendantes de l'espèce de celles que M. Legendre a nommées des fonctions *gamma*, et dont il a donné des Tables fort étendues dans ses Exercices de Calcul intégral. Au moyen de ces Tables, on pourra donc calculer le tems de l'écoulement par un orifice dont le diamètre est telle fraction qu'on voudra de celui du cylindre; ce qui permettra de comparer sous ce ce point de vue important, la théorie à l'observation.

DEUXIÈME PARTIE. *Augmentation de la Dépense par les ajutages cylindriques ou coniques.*

Ce phénomène était déjà connu des Romains, qui n'en avaient pas sans doute une appréciation exacte. Au commencement du siècle dernier, Poleni, professeur à Pavie, en donna la mesure dans un cas très-simple, celui d'un ajutage cylindrique, d'une longueur égale à environ trois fois le diamètre de l'orifice; il fit voir qu'alors la dépense est augmentée d'un tiers, ensorte que si elle est exprimée par 100 en mince paroi, elle devient 133, dans le même tems, au moyen de l'ajutage. Dans un ouvrage publié en 1797, M. Venturi, de Modène, a montré qu'en em-

ployant un ajutage composé d'un cylindre d'une certaine longueur, terminé par deux cônes dont il a fixé les dimensions, on pouvait augmenter la dépense dans le rapport de 12 à 5, c'est-à-dire, à peu près d'une fois et demie ce qu'elle est en mince paroi ; et il ne paraît pas que ce physicien ait encore atteint le *maximum* d'effet dont les ajutages sont susceptibles ; car M. Clément est parvenu à augmenter encore notablement la dépense, en changeant la forme de l'appareil de M. Venturi. Ces expériences, celles qui sont rapportées dans l'Hydro-dynamique de D. Bernoulli et celles de beaucoup d'autres physiciens que nous ne rappellerons pas ici, ont mis le phénomène des ajutages tout-à-fait hors de doute. Il est également constant que cette augmentation de dépense est due à ce que le fluide coule à plein tuyau dans l'ajutage, ce qui fait disparaître la contraction de la veine, et la change même en une dilatation dans le cas de l'ajutage conique ; mais jusqu'à présent on n'a pas expliqué d'une manière satisfaisante pourquoi le fluide remplit ainsi le tuyau qu'on adapte à un orifice en mince paroi. M. Hachette en trouve la cause unique ou du moins la cause principale, dans l'adhésion du fluide aux parois de l'ajutage, c'est-à-dire, dans la force qui produit les phénomènes capillaires et d'autres phénomènes analogues (1). Voici les expériences qu'il a faites pour démontrer cette proposition.

Première Expérience. Le fluide en mouvement était du mercure ; l'ajutage était en fer. Quand le mercure était parfaitement pur, il n'avait aucune affinité pour le fer, et il s'écoulait comme il aurait fait en mince paroi, ou comme si le tuyau n'existait pas. Quand au contraire le mercure était sali par une pellicule formée d'un alliage d'étain et d'autres métaux, cet alliage étamait l'intérieur de l'ajutage, et dans ce cas le mercure coulait à plein tuyau.

Deuxième Expérience. Le fluide était l'eau ; l'ajutage était enduit de cire. Lorsque la cire était parfaitement séchée, l'ajutage ne se remplissait pas et l'eau coulait comme en mince paroi. Mais

---

(1) *Opinion des anciens sur la cause des effets produits par les ajutages.*

M. Venturi a mis en note (pag. 23 de son ouvrage) que Gravesande et d'autres ont attribué à la cohésion naturelle des particules d'eau, l'augmentation de dépense dans les tuyaux additionnels descendans, et il observe que cette cause y entre pour bien peu de chose. Antérieurement, Bossut, Dubuat avaient expliqué l'effet des ajutages par la viscosité de l'eau, la résistance du fluide contenu dans l'ajutage, et l'obliquité des filets qui frappent les parois de cet ajutage. A cette époque, les phénomènes capillaires étaient à peine connus, et jusqu'à présent on ne les avait pas distingués dans le mouvement des fluides, de ce qui appartient à la mécanique proprement dite. Aussi M. Bossut lui-même a-t-il cru devoir accueillir une hypothèse différente de la sienne, présentée par M. Venturi, comme on le voit par la conclusion du rapport fait à l'Institut le 7 septembre 1797. H. C.

il est toujours possible de forcer l'eau de mouiller la cire ; alors l'eau coule à plein tuyau, ce qui tient à ce que l'enduit de cire se trouve pour ainsi dire remplacé par la première couche d'eau qui s'y est attachée. C'est ainsi qu'un disque de verre finit par adhérer avec la même force à la surface de l'eau, qu'il soit ou non enduit d'une légère couche de cire ; car une fois que le disque est mouillé, ce n'est plus que l'action de l'eau sur l'eau qui détermine le phénomène, ainsi que M. Laplace l'a expliqué dans la Théorie de l'Action capillaire.

Un autre fait non moins important que M. Hachette a aussi constaté, c'est que dans le vide ou dans l'air raréfié à un certain degré, le phénomène des ajutages cesse d'avoir lieu (1). Ainsi ayant fait couler l'eau à plein tuyau par un ajutage, sous le récipient de la machine pneumatique, et ayant raréfié l'air dans ce récipient, l'auteur a vu la veine fluide se détacher des parois de l'ajutage, lorsque la pression intérieure a été réduite à 23 centimètres de mercure, la pression extérieure étant $0^{m},76$. En diminuant ainsi la pression intérieure, on augmente l'effet de la pression extérieure qui se transmet sur l'ajutage par l'intermédiaire du fluide contenu dans le vase et à laquelle s'ajoute la pression de ce fluide ; or il arrive un point où la somme de ces deux pressions devient assez grande pour détacher la veine fluide des parois de l'ajutage, de la même manière qu'une force suffisante détache un disque de la surface d'un fluide à laquelle il était adhérent (2).

---

(1) *Sur l'écoulement dans le vide.*

On ne doit pas confondre cette expérience avec celle qui est rapportée pag. 15 de l'ouvrage de M. Venturi. Ce physicien dit qu'après avoir placé sous un récipient de machine pneumatique où l'éprouvette ne marquait que 10 lignes (23 millimètres) de pression, un vase auquel était adapté un ajutage cylindrique, il avait observé que les tems d'abaissement du niveau du liquide dans le vase, ont été les mêmes que si l'écoulement avait eu lieu en plein air et *par un orifice en mince paroi plane, de même diamètre que l'ajutage.*

Ce fait étant admis, M. Venturi a cru devoir attribuer la cause des effets produits par les ajutages, à l'action du milieu où se fait l'écoulement. Il n'a pas remarqué que le contact du liquide et des parois de l'ajutage, doit précéder la sortie de l'eau, pour qu'il y ait écoulement à plein tuyau. J'ai vérifié plusieurs fois que les écoulemens par des orifices en mince paroi ou par des ajutages, se font dans des tems qui ne varient pas sensiblement, quel que soit le milieu qui environne le vase et ses ajutages, et que le liquide peut couler à plein tuyau par un ajutage conique au *maximum* de divergence, dans le vide comme dans l'air. H. C.

(2) J'ai répété la même expérience dans l'air atmosphérique. La veine fluide ne s'est détachée des parois de l'ajutage, que sous la pression d'une colonne d'eau dont la hauteur rapportée à une verticale, était de 22,8 mètres ; en orte que la différence des pressions supérieure et inférieure était de (22,8—10,33) ou de 1247 centimètres en eau, ou 91 centimètres en mercure. La conduite d'eau n'étant pas verticale, on ne peut rien conclure d'exact sur la pression réelle de la colonne d'eau en mouvement. Je dispose un appareil pour mesurer exactement la pression qui détache la veine fluide des parois de l'ajutage, et dans le vide et dans un air plus ou moins condensé. H. C.

Ce que présente l'écoulement dans le vide ou dans l'air raréfié se concilie donc parfaitement avec la proposition de M. Hachette, et ne prouve pas, comme on pourrait le croire, que les phénomènes des ajutages soient dus à la pression de l'air dans lequel ce fluide s'écoule; opinion qui serait d'ailleurs en contradiction évidente avec les deux expériences que nous venons de citer; car dans ces expériences l'action de l'air était la même, et cependant les phénomènes ont été différens selon la nature du fluide et la matière de l'ajutage.

Lorsqu'après avoir détaché la veine fluide par la raréfaction de l'air, comme nous venons de le dire, on fait rentrer l'air sous le récipient, M. Hachette a remarqué que l'eau ne recommence point à couler à plein tuyau, c'est-à-dire que la contraction de la veine qui s'était formée dans l'air raréfié, continue de subsister, quoique la tension barométrique soit redevenue la même qu'auparavant. Cela conduisit à penser, en raisonnant toujours dans l'opinion de l'auteur, que l'adhésion du fluide et de la paroi de l'ajutage ne se produit que dans le premier instant du mouvement, avant que le fluide ait acquis une vitesse sensible dont la direction s'écarte de la paroi. Pour vérifier cette conjecture, M. Hachette fit l'expérience suivante qui sera la dernière que nous citerons.

L'eau coulait à plein tuyau par un ajutage hors du récipient de la machine pneumatique. On a pratiqué une petite ouverture à ce tuyau, assez près de l'orifice. L'air extérieur est entré ensuite dans le tuyau, comme cela devait arriver d'après la théorie (1) de D. Bernoulli; il s'est interposé entre l'eau et la paroi de l'aju-

---

(1) *Mesure de la pression négative dans l'ajutage conique.*

D'après cette théorie (de Bernoulli), les parois d'un ajutage conique éprouvent pendant l'écoulement à plein tuyau, une pression intérieure moindre que la pression extérieure de l'atmosphère. J'ai mesuré la différence de ces deux pressions que j'appelle *pression négative*, au moyen d'un tube en verre à deux branches verticales parallèles, coudées dans la partie inférieure. L'une de ces branches était courbée dans sa partie supérieure, pour s'adapter à la paroi de l'ajutage. Ayant d'abord mis du mercure dans le tube, on a achevé de remplir la branche courbée avec de l'eau, de sorte que l'eau de cette branche communiquait directement avec celle qui s'écoulait par l'ajutage conique. Le mercure s'est élevé dans cette même branche pendant l'écoulement à niveau constant, et j'ai conclu que la hauteur de la colonne d'eau qui mesurait la différence des pressions, correspondait à très-peu près, à la hauteur génératrice de la vitesse que l'eau prend dans l'ajutage conique au point de l'insertion du tube dans cet ajutage. Ce résultat ne s'accordait pas encore avec la proposition de M. Venturi, (pag. 16 de son ouvrage). C'est par cette raison que j'ai dû répéter plusieurs fois la même expérience, et je ne crois pas m'être trompé sur la conclusion que j'en ai tirée. Suivant M. Venturi, l'eau prendrait au point d'insertion du tube, une vitesse mesurée par la *pression négative*, augmentée de la hauteur du niveau constant au-dessus de l'orifice. Cependant je dois faire remarquer que le résultat de son expérience 15e pag. 27, confirme ma conclusion. H. C.

tage; la contraction de la veine s'est formée dans l'intérieur du tube, et l'eau a cessé de couler à plein tuyau. Cela étant, on a refermé exactement l'ouverture qu'on avait faite : l'adhésion de l'eau et du tube ne s'est pas reproduite, et le mouvement a continué comme si le tube n'existait pas, de sorte qu'on aurait pu l'enlever ou le rétablir, sans rien changer au mouvement. Cette expérience réussit également quelle que soit la direction du jet; mais il faut avoir soin de ne point agiter l'appareil, car un très-petit mouvement latéral de la veine fluide détermine de nouveau son adhésion avec la paroi déjà mouillée de l'ajutage, et c'est peut-être pour avoir négligé cette précaution, que M. Venturi, à la page 13 de son ouvrage, énonce un résultat qui paraît contraire à celui de M. Hachette.

TROISIÈME PARTIE. *Figure de la Veine fluide.*

Nous avons peu de chose à dire sur cette troisième partie qui appartient entièrement à la Géométrie descriptive. C'est celle où M. Hachette s'est principalement aidé de deux collaborateurs qu'il s'est adjoints dans tout son travail, M. Girard, dessinateur à l'Ecole Polytechnique, et M. Olivier, ancien élève de cette même Ecole et maintenant officier d'artillerie. On y trouve la description des différentes formes que présente la veine fluide pour certaines figures de l'orifice. Des dessins construits sur une très-grande échelle et joints au Mémoire, représentent la courbe de la veine et quelques-unes de ses sections, dont les points ont été relevés par un procédé susceptible d'une exactitude suffisante qu'il serait difficile et superflu d'expliquer.

Nous avons indiqué, dans cette analyse du Mémoire de M. Hachette, la plupart des expériences nouvelles qui lui sont dues, soit sur la contraction de la veine, soit sur le phénomène des ajutages, et nous avons fait connaître la théorie de ce phénomène à laquelle ces expériences l'ont conduit. La Classe a pu voir par cet exposé ce que l'auteur a ajouté aux découvertes de ses prédécesseurs dans cette partie importante de la mécanique des fluides, et elle a pu juger, en même tems, de ce qui lui resterait à faire pour perfectionner le travail qu'il a entrepris. Nous pensons qu'en engageant M. Hachette à continuer ce genre de recherches, la Classe doit approuver son Mémoire et en arrêter l'impression dans le *Recueil des Savans Etrangers.*

5 Février 1816.

Signé AMPÈRE, GIRARD et POISSON, Commissaires.

La Classe approuve le Rapport et en adopte les conclusions.

CHIMIE.

Du Cyanogène, ou du radical de l'Acide prussique.

Ce nouveau produit, trouvé par M. Gay-Lussac, est formé d'azote et de carbone; il existe dans une substance connue depuis long-tems, que M. Guyton-Morveau avait nommée *acide prussique*. A l'époque où l'on adopta cette dénomination, on croyait que tous les acides provenaient nécessairement d'une combinaison de l'oxigène et d'une base acidifiable. Depuis on a mis dans la classe des acides, des substances qui ne contiennent pas d'oxigène; l'acide prussique est de ce nombre. M. Berthollet, en 1787 (Annales de Chimie, t. I), le regardait comme une combinaison de carbone, d'azote et d'hydrogène. Clouet l'avait obtenu (Annales de Chimie, tome XI, page 30, année 1791) par un procédé, autre que celui décrit par Scheele, dans ses Mémoires (année 1782), et qui confirmait l'opinion de M. Berthollet, puisqu'il consiste à faire passer le gaz ammoniacal sur du charbon incandescent. Clouet avait essayé inutilement de combiner le charbon avec l'un des principes de l'ammoniaque. M. Gay-Lussac a d'abord trouvé, par une analyse exacte, que cent parties en poids d'acide prussique, contiennent :

1°..... 44,39 de vapeur de carbone.
2°..... 51,71 d'azote.
3°..... 3,90 d'hydrogène.
} Total, 100 parties.

La composition de ce gaz s'exprime plus simplement en volumes. Un volume 2 est formé par contraction, d'un volume 2 de vapeur de carbone, d'un volume 1 d'azote et d'un même volume 1 d'hydrogène. Cette composition, conforme à la loi la plus générale et la plus importante de la Chimie moderne, fait voir que la contraction est la moitié des volumes élémentaires; d'où il suit qu'un volume 1 d'acide prussique est composé des volumes de *vapeur de carbone*, d'hydrogène et d'azote, exprimés par les nombres 1, $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Le carbone ne se convertissant pas en vapeur par l'action seule du calorique, on peut demander ce que M. Gay-Lussac entend par *vapeur de carbone?* Pour répondre à cette question, on considère un volume de gaz acide carbonique comme étant formé de deux volumes, l'un d'oxigène et l'autre de *vapeur de carbone*, contractés à moitié du volume total. Dans cette hypothèse, on cherche la densité de la vapeur de carbone de la manière suivante : la den-

sité de l'air étant 1, celle de l'oxigène est 1,1036, et celle du gaz acide carbonique 1,5196. Ces nombres expriment les poids de ces deux gaz sous un volume pris pour unité. Le poids d'un volume égal de vapeur de carbone aura donc pour expression (1,5196 — 1,1036) = 0,416, pesanteur spécifique de cette vapeur. — Pour calculer la pesanteur spécifique P de l'acide prussique, il suffira de savoir que celles de l'azote et de l'hydrogène sont exprimées par les nombres 0,9691 et 0,0732 (l'air étant 1), et on aura

$$P = 0{,}416 + \frac{1}{2}(0{,}9691) + \frac{1}{2}(0{,}0732)$$

$$P = 0{,}416 + 0{,}4845 + 0{,}0366,$$

ou

$$P = 0{,}93715;$$

nombre qui ne diffère en moins de celui qu'on trouve par l'expérience, que d'un centième d'unité.

Pour un autre poids $P' = 1$, on aurait, comme M. Gay-Lussac,

$$\text{Vapeur de carbone} = \frac{416}{937} = 0{,}4439,$$

$$\text{Azote} = \frac{4845}{9371} = 0{,}5171,$$

$$\text{Hydrogène} = \frac{36{,}6}{937} = 0{,}0390.$$

Total..... 1,0000.

M. Gay-Lussac a combiné l'acide prussique avec le potassium, et en a dégagé l'hydrogène; il a obtenu un produit formé du potassium et d'un nouveau radical dont les élémens sont l'azote et le carbone. C'est ce radical qu'il a nommé *cyanogène* (*), et il désigne ses combinaisons par le mot générique *cyanure*. On suppose un volume égal de cyanogène formé d'un volume d'azote et de deux volumes égaux de vapeur de carbone, la contraction étant $\frac{1}{3}$ du volume total. Dans cette hypothèse, on a pour sa pesanteur spécifique C,

$$C = 0{,}9691 + 2(0{,}416) = 1{,}8011.$$

La pesanteur spécifique observée est 1,8064. Cet accord entre le calcul et l'observation sera un des beaux résultats de la Chi-

(*) Ce mot veut dire *produisant du bleu*.

mie moderne. (Voyez le Mémoire de M. Gay-Lussac, sur la combinaison des substances gazeuses, décembre 1809, Nouveau Bulletin de la Société Philomatique, tome I, page 298.)

Le cyanogène, combiné avec l'hydrogène, donne l'acide prussique, du genre des *hydracides ;* on le désigne par ces mots : *acide hydro-cyanique.*

Cette nomenclature s'applique aux découvertes faites par le même chimiste sur le chlore et l'iode. Le chlore se nommait autrefois *acide muriatique oxigéné ;* on le regarde actuellement comme une substance simple qui, par sa combinaison avec l'hydrogène et l'oxigène, donne les acides muriatique et muriatique sur-oxigéné, ou les acides hydro-chlorique et chlorique. On a de même deux acides qui ont pour base l'iode, savoir, les acides iodique et hydriodique.

H. C.

Extrait des Annales de Chimie (tom. 96, novembre 1815, pag. 135); sur la conversion du fer en acier fondu par le diamant.

M. Mushet répéta l'expérience faite à l'Ecole Polytechnique (par MM. Clouet, Welter et Hachette ; voyez le tome II de cette Correspondance, page 457, et les Annales de Chimie, tome XXXI ou XXXII, année 1799), mais en ayant soin de ne pas y faire entrer le diamant. Les résultats lui donnèrent toujours du bon acier pur, ce qui lui fit penser que nous n'avions pas encore des preuves satisfaisantes ou concluantes sur les changemens du fer en acier, par le moyen seul du diamant. M. Pepys pensa que s'il restait encore quelques doutes, la batterie voltaïque serait, à cet égard, un *experimentum crucis*, et son génie lui suggéra facilement une manière de l'établir qui fût à l'abri de toute objection. Il recourba un fil de fer pur et doux, en lui faisant faire un coude vers son milieu, et il le divisa longitudinalement dans cet endroit, au moyen d'une scie très-fine. Il mit dans l'ouverture de la poudre de diamant, ayant soin de l'y maintenir par deux fils plus minces, placés l'un au-dessus, l'autre au-dessous, et qu'il empêcha de se déranger au moyen d'un autre petit fil roulé solidement et exactement autour d'eux. Tous ces fils étaient d'un fer doux très-pur, et la partie qui contenait la poudre de diamant fut enveloppée avec des feuilles minces de talc. L'appareil ainsi préparé fut placé dans le circuit électrique, et ayant été bientôt chauffé à rouge, on le maintint dans cet état pendant six minutes. L'ignition avait si peu d'intensité, que la plupart des assistans n'attendaient aucun résultat décisif.

Cependant M. Pepys ayant ouvert le fil, trouva que le diamant avait disparu; de nombreuses cavités s'étaient formées, pendant la fusion, dans l'intérieur du fer, et toute la partie qui avait été en contact avec le diamant était convertie en un acier vésiculaire et pur. Ce résultat est concluant, car on avait soigneusement évité tout contact de matière charbonneuse, à l'exception du diamant; c'est donc à cette matière seule qu'on peut rapporter le changement survenu dans le fer.

Analyse des travaux de la Classe des Sciences mathématiques et physiques de l'Institut Royal de France, pendant l'année 1815; *par M.* Delambre, *Secrétaire perpétuel.*

PARTIE MATHÉMATIQUE ET PHYSIQUE.

M. Delambre donne l'analyse des Mémoires suivans :

1°. Sur le Flux et le Reflux de la mer. Sur l'Application du Calcul des Probabilités à la Philosophie naturelle; par M. Laplace.

2°. Sur le Calcul intégral, cinquième partie; par M. Legendre. (Voyez page 251 de ce volume.)

3°. Sur les Lois de la réfraction ordinaire et extraordinaire; par M. Ampère. (Voyez page 238 de ce volume.)

4°. Sur deux Micromètres propres à mesurer les diamètres du soleil et de la lune; par M. Rochon.

5°. Sur la Distribution de la chaleur dans les corps. Sur la Théorie des Ondes; par M. Poisson. (Voyez page 243 de ce volume.)

6°. Découverte de deux sortes de double Réfraction, attractive et répulsive; par M. Biot. (Voyez page 246 de ce volume.)

7°. Détermination des Lois suivant lesquelles la lumière se polarise à la surface des métaux. Phénomènes de polarisation successive observée dans des Fluides homogènes. Sur une nouvelle espèce d'Anneaux colorés qui s'obtiennent dans les plaques de spath d'Islande, taillées perpendiculairement à l'axe de cristallisation; par M. Biot.

8°. Sur le mouvement des Fluides dans les tubes capillaires; par M. Girard, inspecteur-général des Ponts et Chaussées. Ce Mémoire contient les tableaux de plus de douze cents expériences, d'où il résulte que dans les tubes capillaires, la température fait varier la vitesse d'écoulement; cette vitesse croît avec la température.

9°. Sur l'Orbite de la planète Vesta, par M. Daussy.
(Durée de la révolution sidérale de cette planète, 1335^j,205, celle de la Terre étant........................ 365^j,256).

10° Sur l'Orbite de la Comète de 1807; par quatre astronomes étrangers. Ils s'accordent sur la durée de sa révolution, et l'estiment de 72 à 74 années. (La période de la comète de 1759 étant de 75 à 76 ans; elle reparaitra vers l'an 1835.)

11°. Sur la libration de la Lune; par MM. Bouvard et Nicollet.

12°. Mémoire (*) sur les Surfaces d'équilibre des fluides imparfaits, tels que graines, sables, etc.; par M. Allent.

L'intention de l'auteur n'a point été de donner de nouveaux développemens à la Théorie de la Poussée des terres, ni d'ajouter de nouveaux faits à ceux qui ont été recueillis sur cette question, dont la solution complète s'appliquerait si utilement à l'architecture civile, hydraulique et mécanique; mais il s'est proposé de faciliter le tracé géographique des surfaces de talus naturel et de talus d'éboulement entre des limites données, d'après la génération même de ces surfaces, déduite d'une seule expérience fondamentale. Cette génération est expliquée dans le Mémoire de M. Allent, sans le secours d'aucun calcul ni d'au-

---

(*) L'auteur de ce Mémoire, très-familier avec les méthodes de la Geométrie descriptive, a déduit d'une expérience fondamentale, la loi de génération des surfaces dites de *remblai* et *d'éboulement* assujéties à passer par des points ou des lignes données : ce Mémoire est divisé en trois chapitres, dans lesquels on traite, 1°. des talus naturel et d'éboulement, et des lois communes aux talus; 2°. de la surface élémentaire du talus naturel, et des surfaces formées par ses combinaisons; 3°. de la surface élémentaire et des surfaces composées du talus d'éboulement.

La science doit à M. Allent plusieurs Mémoires fort intéressans; celui-ci y est remarquable par une heureuse application de la Géométrie à une question qui d'abord semble appartenir spécialement à la Mécanique. On reconnaîtra dans le dernier article, la modestie du savant ingénieur.

« Ces considérations appartiennent à la mécanique des fluides imparfaits. Je n'ai voulu dans ce Mémoire, qu'exposer les lois principales de leurs surfaces sous les talus naturel et d'éboulement, et montrer l'identité de ces surfaces avec des enveloppes développables qui ont pour enveloppées des cônes droits circulaires dont l'axe est vertical. Je regretterais de n'être pas en situation de continuer ces recherches, si je n'étais certain qu'il suffit d'appeler sur ce point l'attention des savans et des ingénieurs. Nous sommes loin des tems où les uns étaient exclusivement livrés à la théorie, et les autres à la pratique. L'ingénieur applique les principes des sciences aux travaux de l'art qu'il professe, et le géomètre ou le physicien trouve souvent, dans les méthodes des arts, les sujets de ses calculs ou de ses expériences. C'est un fruit de ces institutions, telles que l'Ecole Polytechnique et les Ecoles des services publics, où les savans, les ingénieurs les plus distingués se trouvent réunis, comme chefs, instituteurs ou collaborateurs. Moi-même je dois peut-être à la faible part que j'ai prise aux travaux des conseils ou des commissaires chargés d'arrêter les plans d'instruction de ces écoles, d'avoir pu donner plus de généralité à ces observations pratiques. Puissent-elles du moins servir à montrer l'utilité de ces établissemens, où par un échange et une chaîne de services, les sciences contribuent aux progrès des arts, et trouvent dans les progrès mêmes, des moyens de perfectionnement. A.

cune figure, avec une méthode et une clarté de style qui ne laissent rien à desirer.

13°. Démonstration du théorème de Fermat sur les nombres polygones ; par M. Cauchy. (Voyez page 295 de ce volume.)

14°. Sur les Puissances refractives et dispersives de certains liquides ; par MM. Arago et Petit.

Le résultat de ce Mémoire est que les vapeurs ont un pouvoir réfringent sensiblement moindre que celui des liquides qui les ont formées. (*Voyez un article relatif au pouvoir réfringent, tome I de la Correspondance*, page 366.) Le pouvoir réfringent du soufre carburé liquide, rapporté à l'air, étant 3, celui de la même substance à l'état de vapeurs, rapporté de même à l'air, ne surpasse pas 2. Les auteurs de ce Mémoire ont entrepris un travail pour déterminer les variations qu'éprouve le pouvoir réfringent d'un corps, soit par le changement de la densité du corps, ou par sa combinaison avec d'autres substances.

Un autre résultat non moins intéressant que le premier, c'est que le pouvoir dispersif diminue avec la densité, et dans un plus grand rapport que le pouvoir réfringent. Dans le soufre carburé à l'état liquide, le rapport des pouvoirs dispersif et réfringent est 0,14, et il se réduit à 0,08 dans l'état de vapeur.

15°. Recherches sur la Dilatation des solides, des liquides et des fluides élastiques ; par MM. Dulong et Petit.

Le résultat de ce Mémoire est, que dans les hautes températures, la dilatation des métaux suit une marche plus rapide que celle de l'air, de sorte, par exemple, que quand un thermomètre d'air marque 300° sur son échelle, un thermomètre à mercure en marque 310, et le thermomètre métallique 320.

16°. Rapport de MM. Charles, de Rossel et Arago, sur le Phare à réflecteur parabolique de M. Lenoir.

17°. Rapport sur les Serrures à combinaison, par M. Molard.

18°. Sur le tracé des routes ; par M. Dupin. Dans un premier Mémoire, l'auteur considère les routes comme destinées à joindre des points isolés en nombre infini, sur des surfaces d'une courbure arbitraire. Dans le second, il suppose qu'elles doivent servir au transport, par élémens infiniment petits de masses continues linéaires, superficielles ou solides. M. Monge avait résolu ce problème, en considérant les routes comme rectilignes. (Voy. le Mémoire des Déblais et Remblais, par M. Monge, Académie de Paris, volume de ses Mémoires, année 1781.) M. Dupin suppose que les routes sont assujéties à suivre les inflexions d'un terrain courbe quelconque.

19°. Exposition des Opérations exécutées dans les départemens du

Haut et Bas-Rhin, pour servir de fondement à la Carte de l'Helvétie, et à la mesure du parallèle de Strasbourg à Brest; par M. Henry, colonel au Corps Royal des Ingénieurs-Géographes.

20°. Nouvelle Machine à vapeur; par M. Gengembre, inspecteur général des Monnaies.

---

§ III.

ANNONCE D'OUVRAGES.

Traité élémentaire de Dynamique, ou Leçons de Mécanique analytique données à l'Ecole Polytechnique; par M. de Prony, *première et deuxième Parties*.

Supplément à l'Essai sur la Théorie des Nombres, seconde édition; par M. Legendre.

Ce Supplément est divisé en trois chapitres. *Premier chapitre.* Décomposition d'un nombre donné en quatre carrés, tels que la somme de leurs racines soit égale à un nombre donné compris entre certaines limites. *Second chapitre.* Démonstration du théorème de Fermat sur les nombres polygones, et de plusieurs théorèmes analogues. *Troisième chapitre.* Deux méthodes nouvelles pour la résolution des équations numériques.

Traité de Chimie élémentaire, théorique et pratique, tome quatrième et dernier. Un vol. in-8° de 333 pages. (Le nombre des planches de cet ouvrage est de 32).

Par M. Thenard, membre de l'Institut.

Recueil de Mémoires, Consultations et Rapports sur différens objets de Médecine légale. Un volume in-8°, 1816; par M. Chaussier (*).

(*) M. Chaussier, actuellement Médecin de l'Ecole Polytechnique, a été l'un des instituteurs fondateurs de cette Ecole. C'est involontairement qu'on a omis son nom sur la liste imprimée, pag. 333 et 334 du premier volume de la Correspondance. On y désigne M. Chaptal comme l'un des professeurs adjoints de Chimie. A la vérité, ce savant a fait la plus grande partie de l'un des Cours préliminaires qui ont précédé les Cours réguliers et annuels; mais ensuite il a été remplacé par M. Chaussier, qui fut à la fois professeur et médecin jusqu'en 1799, époque à laquelle on organisa les Ecoles de services publics, et où l'on réduisit le nombre des Professeurs de Chimie de l'Ecole Polytechnique. H. C.

Traité de Physique expérimentale et mathématique. 4 vol. in-8°, caractère serré ; par M. Biot. (Il aura environ 20 planches, paraîtra dans le mois de mars, et se vendra chez M. Déterville, libraire, rue Haute-Feuille.)

Annales de Chimie et de Physique, rédigées par MM. Gay-Lussac et Arago ; ouvrage périodique qui paraît tous les mois, par cahier de sept feuilles. (Prix de l'abonnement pour un an, 20 francs, à Paris.)

Mécanique analytique, par Lagrange, nouvelle édition augmentée par l'auteur. Deux vol. in-4°.

Mélanges d'Analyse algébrique et de Géométrie ; par M. J. de Stainville, répétiteur adjoint à l'Ecole Polytechnique ; 1 v. in-8°.

Ouvrages de M. Dupin, officier du Génie maritime : Tableau de l'Architecture navale militaire, aux dix-huitième et dix-neuvième siècles ; première Partie, manuscrite. Analyse de cette première Partie, in-4° de 24 pages. Lyon, 1815.

Du Rétablissement de l'Académie de Marine. Paris, année 1815.

Annuaire présenté au Roi par le Bureau des Longitudes, pour l'an 1816. (Prix, 1 fr., chez Mme Courcier.)

Aux articles extraits du Système du Monde de M. de Laplace, qui rendent cet Annuaire si recommandable, M. Arago a ajouté, cette année, plusieurs Tables d'un grand intérêt pour les élèves de l'Ecole Polytechnique. Ces Tables font connaître, 1°. les vitesses du vent, dont la plus petite, à peine sensible, est de 1800 mètres par heure, et la plus grande (celle du vent qui renverse des édifices et déracine les arbres), de 162 mille mètres dans le même tems, ou 45 mètres par seconde ; 2°. la marche de l'aiguille aimantée ; 3°. les pesanteurs spécifiques des fluides élastiques, observées et calculées par la méthode que nous avons appliquée au cyanogène de M. Gay-Lussac (pag. 402 et 403 de ce cahier).

Règles à calculer, assujéties aux mesures françaises, exécutées par M. Lenoir, sous la direction de M. Jomard, ancien élève, commissaire du Gouvernement près la Commission d'Egypte. (Se vendent au Dépôt de la Marine, rue Louis-le-Grand, et on trouve chez le même artiste des baromètres portatifs, de l'invention de M. Gay-Lussac, prix 100 fr.)

INSTITUT ROYAL DE FRANCE.

Prix et sujets de Concours, année 1815.

PREMIÈRE CLASSE. — *Prix décernés.* — Mémoire sur les lames élastiques; auteur, Mlle Sophie Germain, de Paris.

Mémoire sur la Théorie des Ondes; auteur, Augustin-Louis Cauchy.

Prix de Physique, partagé entre MM. Seebeck et Brewster.

M. Seebeck a découvert que toutes les masses de verre, chauffées et ensuite refroidies rapidement, produisent des figures régulières diversement colorées, lorsqu'elles sont interposées entre des piles de glace, ou des miroirs réflecteurs combinés suivant la méthode de Malus. Il a vu en outre que les figures qui se produisent dans un même morceau, devenaient différentes, quand on en changeait la forme. M. Seebeck a obtenu les mêmes phénomènes, en comprimant fortement le verre dans un étau. Aussitôt qu'on retire le verre de l'étau, il reprend sa forme primitive et ne donne plus de couleurs.

Sujet de Concours pour le Prix de Mathématiques à décerner en 1818.

Démontrer ce théorème de Fermat : *Passé le second degré, il n'existe aucune puissance qui puisse se partager en deux puissances du même degré.*

QUATRIÈME CLASSE. — *Beaux-Arts.* — Grands prix d'Architecture; *Projet d'Ecole Polytechnique;* auteurs, MM. de Dreux et Vincent.

---

§. IV. PERSONNEL.

M. Berge, maréchal-de-Camp d'Artillerie, a été nommé commandant de l'Ecole spéciale de l'Artillerie et du Génie, par ordonnance du Roi du 7 février 1816.

M. Cauchy (Augustin-Louis), a été chargé de faire pendant l'année scolaire 1815 — 1816, le cours d'analyse de la première division, à la place de M. Poinsot, à qui sa santé n'a pas permis de faire ce cours.

Conformément à l'ordonnance (*) du 6 juin 1814, un Concours pour deux places d'Elèves ingénieurs-hydrographes, a été ouvert le 1er mars 1816. En l'absence des deux examinateurs de la Marine, MM. Monge (Louis) et Lancelin, M. Poisson a été chargé de l'examen.

MM. *Paul* Monnier et *Etienne-Germain* Capella, élèves de l'Ecole Polytechnique, ont été nommés à ces deux places comme ayant le mieux satisfait à l'examen.

CONSEIL DE PERFECTIONNEMENT.

Année scolaire 1815—1816.

Le Conseil de Perfectionnement a revu dans cette session (la 15e) les programmes d'enseignement de l'Ecole. Le programme de Physique seul, a subi une nouvelle rédaction; il a été adopté tel qu'il a été proposé par le Conseil d'Instruction.

L'ensemble de ces programmes forme une brochure in-4° de 64 pages. On y a joint, suivant l'usage, trois tableaux qui montrent la distribution des Cours et du tems des études pendant l'année scholaire 1815—1816.

(*) *Extrait de l'Ordonnance du Roi, concernant l'organisation du dépôt de la Marine*, 6 *Juin* 1814.

Art. 3 et 4. Le nombre d'élèves ingénieurs-hydrographes ne pourra dépasser celui de quatre; ils seront assimilés aux élèves du génie maritime.

Art. 10. Les sujets qui se présenteront pour être élèves hydrographes, devront écrire correctement la langue française, et posséder une autre langue; ils devront en outre savoir l'Arithmétique, la Géométrie, les deux Trigonométries, les Elémens d'Astronomie pratique et les principes du dessin. Ils ne pourront être reçus élèves avant d'avoir été examinés, d'après un ordre du Ministre, par un des examinateurs de la Marine, en présence du directeur général et de son adjoint, des deux ingénieurs-hydrographes en chef. Il sera dressé procès-verbal de cet examen.

ADMISSION A L'ÉCOLE ROYALE POLYTECHNIQUE.

Discours prononcés à l'ouverture des examens de l'Ecole Polytechnique, en 1814 et en 1815, par M. le Comte de CHABROL, *Préfet de la Seine.*

Paris, 3 août 1814.

« Messieurs,

» La circonstance qui rassemble ici la majeure partie des candidats à l'Ecole Polytechnique, réveille chaque année chez moi le même intérêt et les mêmes souvenirs.

» C'est à vous, messieurs, à maintenir, par vos études, une Ecole célèbre, estimée chez tous les peuples de l'Europe autant qu'elle l'est en France. Plusieurs d'entre vous contribueront sans doute à l'illustration de cet établissement destiné à traverser toutes les époques de nos révolutions sans en éprouver aucune atteinte.

» Tel est le sort des institutions liberales et utiles, on y revient toujours avec empressement, et elles s'adaptent d'elles-mêmes à toutes les circonstances politiques; celle-ci, dès son principe, eut pour but de former des sujets que l'on pût employer avec confiance dans toutes les carrières. Elle est propre à faire germer et à développer de grandes vues, à élever les pensées et à faire entrevoir le grand ensemble qui lie entr'eux tous les arts qui concourent à la splendeur des Etats, et à établir entre tous les services cette harmonie et cet accord qui contribuent au succès des grandes entreprises.

» L'examinateur distingué (M. Labey), qui doit juger de vos talens, nous est cher à plus d'un titre. Sa longue expérience vous garantit, messieurs, que rien de ce qui peut déterminer son suffrage en votre faveur n'échappera à sa sagacité. Sa douceur vous permet d'user de tous vos moyens : elle doit borner cette timidité qui pourrait en restreindre le développement. Si tous les candidats ne peuvent être admis, un retard ne fera que les fortifier dans des études utiles.

» Félicitez-vous, messieurs, d'être arrivés au degré d'instruction nécessaire pour soutenir l'examen de l'Ecole Polytechnique. Ce que vous avez acquis de connaissances pour y parvenir indique déjà que vous avez employé utilement le tems de votre jeune âge.

» Vous n'êtes pas étrangers à la littérature, et les sciences exactes ne doivent pas vous la faire négliger; elles doivent ser-

vir, au contraire, à vous mettre à même d'y porter une logique plus forte, des vérités plus exactes et mieux démontrées.

» L'éloquence n'est puissante que par la force des raisonnemens, par l'ordre des idées et l'enchaînement des conséquences. Loin de nous l'idée de ceux qui croient que l'étude des sciences étouffe dans leur naissance l'élan des sentimens du cœur et les fleurs de la littérature : plusieurs génies ont prouvé qu'elles pouvaient se concilier; et si ces exemples sont rares, c'est qu'il est donné à peu d'hommes d'exceller à la fois dans plusieurs genres différens.

» Les carrières qui vont s'ouvrir devant vous seront désormais plus variées, et n'en seront pas moins importantes. Jusqu'ici la guerre réclamait le plus grand nombre des élèves de l'Ecole Polytechnique; plusieurs ont été moissonnés de bonne heure; une foule de jeunes talens ont disparu avant d'avoir acquitté toute leur dette à l'Etat; mais du moins ont-ils tous laissé les exemples les plus nobles de leur dévouement à la Patrie.

» Des faits biens récens encore, applaudis par tous les militaires, admirés par un ennemi généreux, ont montré sous les murs de Paris, ce qu'on pouvait attendre d'élan, de sang-froid et de bravoure d'une jeunesse élevée dans la contemplation continuelle du service de l'Etat; aujourd'hui, messieurs, la paix est donnée au monde, une famille auguste et révérée vient faire cesser une lutte qui a ensanglanté l'Europe et qui la menaçait d'une décadence rapide, suite nécessaire de la dépopulation causée par tant de batailles meurtrières.

» Le commerce, les arts, les manufactures, la navigation réclameront particulièrement votre application et vos services. Vous vous y livrerez avec d'autant plus de joie que vous sentirez tout l'avantage de contribuer au bonheur des peuples, objet constant de la méditation d'un souverain dont tous les desirs tendent à fermer les plaies de l'Etat. Contribuez, messieurs, de tout votre pouvoir, dans les carrières que vous devez parcourir, à le faire bénir par ses peuples; c'est le sentiment qu'il réclame d'eux, et il doit principalement l'obtenir, à l'aide de ceux qui sont destinés à suivre l'exécution des sages projets de son administration paternelle. »

Paris, 1er septembre 1815.

« Messieurs,

» Vous allez entrer dans la lice qui vous est ouverte pour être admis à servir un jour votre pays par vos lumières et par votre courage. Cette noble destination vous impose des devoirs, comme elle vous promet de l'honneur. Plus les hommes

sont éclairés, plus ils doivent connaître et pratiquer les principes d'ordre et de soumission à l'autorité. Si l'ignorance est une excuse pour la multitude aveugle qui marche sous la bannière des factions, il n'en est pas ainsi de l'homme instruit qui leur prête son appui. Il doit savoir que la prospérité publique et le bonheur privé dépendent de la stabilité du pouvoir suprême, et qu'il n'est rien de stable sans un dévouement sincère, sans une fidélité inviolable envers le prince légitime, revêtu de l'autorité et chargé du maintien des lois.

» Jeunes gens, espoir du Monarque et de la Patrie, croyez aux conseils de celui qui vous a devancés dans la carrière que vous allez parcourir, et qui ne peut se rappeler cette époque sans la plus vive émotion. Au milieu des vicissitudes que j'ai pu éprouver, je n'ai jamais perdu le souvenir de ces heureux instans de la première jeunesse, où des principes, des goûts, des études semblables forment des liens indissolubles pour le reste de la vie, et fondent l'amitié sur l'estime.

» C'est à ce titre, autant qu'à celui de magistrat, que j'ai droit de m'adresser à votre cœur, et j'ai l'orgueil de penser que ma voix ne sera pas comme un vain bruit qui résonne et se perd sans laisser de traces après lui.

» La Patrie et le Roi, le Roi et la Patrie! Ces noms sont inséparables; telle est la maxime qu'un illustre prince proférait dernièrement au milieu de l'élite de nos concitoyens. Placé le plus près du trône, il considérait comme la première gloire celle d'être le premier et le plus fidèle sujet du Roi.

» Puissent ces paroles mémorables, qui firent une si forte impression sur nous, produire le même effet sur vos esprits! Qu'elles vous servent constamment d'exemple et de leçon; qu'elles soient toujours la règle de votre conduite.

» Si vous abandonniez jamais ces principes pour suivre les écarts des factions, en vain vous feriez des progrès dans les arts et dans les sciences, vos succès même et vos talens seraient un malheur pour l'Etat. Ils ne peuvent avoir de prix qu'autant qu'ils serviront à consolider le trône et à l'environner du respect et de la vénération des peuples.

» Votre carrière, messieurs, peut être plus ou moins brillante, elle ne sera jamais véritablement honorée et embellie par la considération publique, sans la pratique des devoirs de sujet dans toute leur étendue, et le sentiment d'un ardent amour pour la Patrie et le Souverain.

» Ces vertus furent de tout tems familières aux Français; elles doivent l'être plus que jamais, sous un Prince que l'Europe place avec justice au rang des Monarques les plus renommés, par ses lumières et par ses vertus. »

CONCOURS DE 1815.

EXAMINATEURS POUR L'ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

Analyse; Mécanique........	MM. Legendre, Poisson. *suppléant*, M. Ampère.
Géométrie descriptive; Analyse appliquée à la Géometrie;	M. Binet (J. P. M.)
Physique et Chimie..........	M. Dulong.

EXAMINATEURS POUR L'ADMISSION A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

Paris...........................	M. Reynaud.
Tournée du Sud...............	M. Dinet.
Tournée du Nord..............	M. Labey.

Les examens ont été ouverts le 1er septembre, et les cours pour la seconde division formée par la nouvelle promotion, ont commencé le 13 novembre.

Le Jury d'admisssion a prononcé le 17 octobre 1815, sur les candidats qui se sont présentés au concours de cette année.

147 candidats ont été examinés;

SAVOIR :	A Paris........................	66	147
	Dans les départemens...........	81	

Sur ce nombre 118 ont été déclarés admissibles,

SAVOIR :	De l'examen de Paris............	54	118.
	Des départemens.................	64	

Le nombre des candidats admis à l'Ecole, par suite de la décision du Jury, a été de 94.

SAVOIR :	De Paris........................	47	94.
	Des départemens.................	47	

Nombre des élèves admis à l'Ecole depuis son établissement, 3189.

SAVOIR :	De Paris........................	1519	3189.
	Des départemens..............	1670	

Nombre des candidats examinés depuis l'établissement de l'Ecole, 7376,

SAVOIR :	De Paris........................	3289	7376.
	Des départemens..............	4087	

LISTE,

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE,

Des Elèves admis à l'Ecole Royale Polytechnique, par suite de la décision du Jury, du 17 octobre 1815.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Allard.	Isidore.	Parthenay.	Deux-Sèvres.
Allard.	Nelzir.	Parthenay.	Deux-Sèvres.
Ballery.	Sébastien.	Paris.	Seine.
Bazin.	Théodore-François.	Rennes.	Ille-et Vilaine.
Bellot.	Jean-Marie-Nicolas.	Fontainebleau.	Seine-et-Marne.
Bernard.	Jean-François.	Besançon.	Doubs.
Bienaymé.	Irénée-Jules.	Paris.	Seine.
Billoin.	Jean-Pierre-Antoine.	Cahors.	Lot.
Bizouard-Montille	Antide.	L'Isle de France.	
Bonfils.	Alexis-François.	Besancon.	Doubs.
Bouvet.	Charles-Adolphe.	Saint-Remy.	Marne.
Bruzard.	Augustin-Felix.	Semur.	Côte-d'Or.
Bussy (Belly de)	Michel-Jean-Baptiste.	Beaurieux.	Aisne.
Caffort.	Gabriel-Zacharie.	Raissac.	Aude.
Camus.	Charles-Louis-Constant.	Sailly-Zèle.	Somme.
Carbonnier.	Aimé-Théodore-Julien.	Paris.	Seine.
Caron.	Louis-Felix-Joseph.	Saint-Omer.	Pas-de Calais.
Castelnau (Boileau de).	Camille-Simon-Louis.	Nismes.	Gard.
Chambert.	Joseph.	Montech.	Tarn-et-Garon.
Charvet.	Hippolyte-Lucien.	Grenoble.	Isère.
Choiset.	Prosper.	Soissons.	Aisne.
Christofle.	Jean-Jacques.	Bessan.	Hérault
Clerget.	Charles.	Langres.	Haute-Marne.
Collardeau Du-heaume.	Charles-Felix.	Paris.	Seine.
Collignon.	Barthélemy.	Metz.	Moselle.
Conil.	Jacques.	Narbonne.	Aude.
Conrot.	Pierre-Felix.	Sedan.	Ardennes.
Costel.	Jean-Paul-Victor.	Paris.	Seine.
Daman.	Aug.-Victor-Antoine.	Saint-Omer.	Pas-de-Calais.
Delaville le Roulx.	Joseph.	Paris.	Seine.
Desforges (Boucher).	Ant.-Joseph-Charles.	L'Isle Bourbon.	

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Desmarest.	Marie-Joseph-Eugène.	Soissons.	Aisne.
D'Houdetot.	Stanislas-Adèle.	Charleville.	Ardennes.
Dubard.	François-Pierre.	Montigny - sur-Vingeanne.	Côte-d'Or.
Duffourc.	Philippe.	Astaffort.	Lot et Garonne.
Dumoulin.	Joseph-Henri.	Grenoble.	Isère.
Durouret (Geoffroy).	François-Felix.	Grasse.	Var.
Etesse.	Paul-Joachim-Elisabeth	Bordeaux.	Gironde.
Fabry.	Auguste.	BourgSt.-Andéol	Ardèche.
Finck.	Pierre-Joseph-Etienne.	Lauterbourg.	Bas-Rhin.
Fourier.	Adolphe.	Angers.	Maine-et-Loire.
Frézouls.	Antoine-Casimir.	Vielmur.	Tarn.
Frotois.	Jean-Joseph.	Espalion.	Aveiron.
Gail.	Jacques-Desiré.	Paris.	Seine.
Gandillot.	Jean Denis.	Mondon.	Doubs.
Goll.	Henri-Edouard.	Andolsheim.	Haut-Rhin.
Gougeon.	Paul-Nicolas.	Metz.	Moselle.
Grimard Durepaire.	Elie.	Brantôme.	Dordogne.
Grosier St.-Elme.	Augustin.	Orléans.	Loiret.
Hamart.	Paul.	Châteauroux.	Indre.
Harmois.	Louis-François-Joseph.	Namur.	
Herson.	Placide-Alexandre.	Paris.	Seine.
Jouffroy.	Louis.	Brest.	Finistère.
Labaume (Chabrier).	Jean-Baptiste-François-Alexandre.	Mons.	Var.
Labesse (Métivier de).	Gilbert.	Bastia.	Corse.
Lacroix.	Charles-Casimir-Sevère.	Malaga en Espag.	
Landraud.	Pierre.	Garat.	Charente.
Lavédrine (Demalet).	Pierre-Louis-Felix.	Riom.	Puy-de-Dôme.
Lecoutour.	Louis-Franc.-Guillaume	Paris.	Seine.
Lemaistre.	Charles-Aimé.	Montoire.	Loir-et-Cher.
Lepreux.	Felix-Louis.	Paris.	Seine.
Lestelle.	Thomas.	Blois.	Loir-et-Cher.
Malcotte.	Benjamin-Joseph.	Fumay.	Ardennes.
Manès.	Guillaume.	Saujon.	Charente-Infér.
Marozeau.	Pierre-Georges.	Gouvieux.	Oise.
Marraud.	François.	Monclar.	Lot-et-Garonne.
Marthe.	Adolphe.	Epernay.	Marne.
Mascrey.	Joseph-Adr.-Emmanuel	Paris.	Seine.
Masquelier.	Vincent.	Lille.	Nord.
Maugars.	Eugène.	Nantes.	Loire-Inférieure
Michaud.	Jean-Charles-Paul.	Dôle.	Jura.
Oudan.	Louis-Marie.	Reims.	Marne.
Pariset.	Nicolas-Franç.-Joseph.	Rennes.	Ille-et-Vilaine.
Payen.	Emile-Auguste.	Liège.	
Pinet dit d'Anglemont.	Pierre-Isid.-Constantin.	Valence.	Drôme.

NOMS.	PRÉNOMS.	LIEUX DE NAISSANCE.	DÉPARTEMENS.
Pironneau.	Louis Agis.	Nontron.	Dordogne.
Poiseuille.	Jean-Léonard-Marie.	Paris.	Seine.
Pontagnier.	Hippolyte-Gabriel.	Aigueperse.	Puy-de-Dôme.
Poussielgue.	Albin.	Paris.	Seine.
Rallier.	Toussaint-Louis-Jean-Joseph.	Rennes.	Ille-et-Vilaine.
Redon.	Jean-Étienne.	Briancon.	Hautes-Alpes.
Renaut.	Victor-Antoine.	Lunéville.	Meurthe.
Réocreux.	Joseph.	Saint-Étienne	Loire.
Riffault.	Anatole.	Monts.	Indre et Loire.
Rouget.	Jean-Joseph.	Aix.	Bouches-du-Rh.
Savary.	Felix.	Paris.	Seine.
Sebe.	François-Frédéric.	Grenoble.	Isère.
Segretain.	Pierre-Théophile.	Niort.	Deux-Sèvres.
Thilorier.	Charles-Saint-Ange.	Forges.	Charente-Inf.
Thirria.	Charles-Edouard.	Beauvais.	Oise.
Tournyer.	Nicolas.	Amboise.	Indre-et-Loire.
Tronc.	Fulcran-Antoine.	Lodève.	Hérault.
Tugny (Gondallier).	Michel-Antoine-Desiré.	Bouffignereux.	Aisne.
Valat.	Jacques-Pierre-Fanny.	Montpellier.	Hérault.

ADMISSION DANS LES SERVICES PUBLICS.

Liste, *par ordre de mérite, des Elèves admis dans les services publics, pendant l'année* 1815.

ARTILLERIE DE TERRE.

MM.
Pommé.
Gaillardon.
Lechevalier.
Chaper.
Pirain.
Favre Bulle.
Pierrugues.
Ferrière.
Batbedat.
Jousserant.
Bobillier.
Olivier.

MM.
Mutel.
Puillon Boblaye.
Moultson
Pernet.
Leblanc.
Prat.
Guyonneau Pambour.
Castillon.
Loizillon.
Caron (Pierre).
Hélie.
Piobert.

MM.
Rogier.
Le Paige Dorsenne.
Giraud.
Juge.
Camus.
Dufraisse.
Paris.
Cathol Dudeffan.
Pargade.

MM.
Moreau (Emile).
Garçon Rivière.
Bardin.
Mie.
Chambige.
Percy.
Payan.
Gineste.

GÉNIE MILITAIRE.

MM.
Chardonneau.
André.
Mengin.
Villeneuve.
Durivau.
Roubaud.
Sergent.
Germain.
Lemarchand.

MM.
Baillot.
Garnot.
Crozals.
Morlet.
Dubain.
Maitrot.
Lenglet.
Demallet Lavédrine.

ETAT de situation des Elèves de l'Ecole Royale Polytechnique, à l'époque du 1er Janvier 1816.

L'Ecole était composée, au 1er Janvier 1815, de... 251 Elèves.
Elle a perdu pendant l'année 1815,

SAVOIR :

Admis dans les services publics.	Artillerie de terre....	41	58	124
	Génie militaire......	17		
Démissionnaires ou sortis sans être placés....			66	

Reste.................... 127
Elèves admis à dater du 1er novembre 1815.......... 94

TOTAL des Elèves composant l'Ecole au 1er Janv. 1816. 221

SAVOIR :

Première division..................	108	221
Deuxième division..................	113	

AUTEURS
DES ARTICLES SCIENTIFIQUES,

Insérés dans les trois premiers volumes de la Correspondance sur l'Ecole Polytechnique, depuis avril 1804 jusqu'en janvier 1816.

***LISTES** des Elèves admis à l'Ecole Polytechnique, depuis l'année de sa création, janvier 1795, jusqu'au premier janvier 1816.*

NOMS DES ÉLÈVES

Nombre total des Elèves admis à l'Ecole Polytechnique, jusques et compris le 1er janvier 1816 3189

SUITE

DE LA TABLE DES MATIÈRES DU VOLUME III.

Table du IIIe Cahier.

Janvier 1816.

§ Ier. Analyse. — Géométrie.

§ II. Sciences physiques.

§ III.

§ IV.

Errata. ——— *Avis au relieur sur le placement des planches.*

ERRATA

Du troisième Cahier du troisième Volume.

La première feuille de ce cahier étant la dix-huitième du volume, doit être numérotée de 259 à 274 ; c'est par erreur que les pages sont cotées de 1 à 16. (On rappelle ici une autre erreur de numéro à la page 187 du second volume ; cette page devait être marquée 137.)

3me vol., page 277, ligne 12, abaissée sur, *lisez* abaissée sur *AC*.

Avis au Relieur.

Les Tables des Matières des trois cahiers qui composent le troisième volume, doivent être réunies et placées après la page 422 de ce volume.

Second Avis au Relieur.

Placement des Planches des trois premiers volumes de la Correspondance.

Premier volume. (476 pages in-8°, et 13 planches.)

Ce volume contient 10 cahiers et 13 planches de format in-8°, marquées des lettres C *d*, suivies des chiffres depuis 1 jusqu'à 13 inclusivement ; ensorte que la première est marquée (C *d* 1) et la dernière (C *d* 13).

Second volume. (469 pages in-8°, et 19 planches, dont 6 in-folio.)

Ce volume contient 5 cahiers, 13 planches in-8° et 4 in-folio, toutes marquées des lettres C *d*, suivies des chiffres depuis 14 jusqu'à 30 inclusivement. Entre la planche 5 du troisième cahier, marquée C *d* 23, et la planche B in-folio du quatrième cahier, marquée C *d* 24, il y a une autre planche A in-folio marquée (A, 8 (1)). Entre la planche 3 du cinquième cahier, marquée (C *d* 29), et la planche 5 (C *d* 30) du même cahier, il y a deux planches in-folio, l'une qui ne diffère pas de la planche C *d* 15, et l'autre marquée (A, *f*, 1).

Troisième volume. (422 pages, et 10 planches).

Ce volume contient 3 cahiers et 10 planches in-8° marquées des lettres C *d*, suivies des chiffres depuis 31 jusqu'à 40 inclusivement. La sixième du premier cahier, cotée C *d* 36, est une carte du cours de la Marne près Paris.

Le nombre total des planches des trois premiers volumes de la Correspondance est de 42, dont six sont in-folio,

HISTOIRE DE L'ALGEBRE DES INDIENS (Page 260-283)

Page 273 et Suivantes .... Majool .... مجهول ;

Aswad .... اسود ; Neelok .... نیلک ;

Page 273, Ligne 19 .... { Signe Positif .... دهن ; Signe Negatif .... رني ; }

Idem ...... *Ligne 21* .... Inconnue d'une Equation .. نجي ;

Idem ...... *Ligne 30* .... Signe du Carré .... مال ;

Idem ...... *Ligne 31* .... Signe du Cube .... كعب ;

Page 274 Ligne 22 .... Inconnues .. या, का, नी, पी, लो.

Page 275 Ligne 12 .... Nombre .... 153, ١٥٣.

Page 277
Fig. 1re

Même Page 277, Figure 2me dite la Fiancée.

Chiffres (Page 281, Ligne 17)

Sanscrits	१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ०
Arabes ou Persans	١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠
Idem	1 ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ 9 0
Dans Planude .... *(Auteur qui florissoit en 1327.)*	1 ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ 9 0
Tables Manuscrites de Sacrobosco *(Auteur Anglais Mort en 1256.)*	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0
Européens	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Exemple d'une Multiplication (Page 281, Ligne 24)

١٢	12
١٣٥	135
١٢	12
٣٦	36
٦٠	60
١٦٢٠	1626

HISTOIRE DE L'ALGEBRE DES INDIENS *(Page 260-283)*

Page 273 et Suivantes.................Majool..............مجهول ;

Aswad.......اسود ; Neelok..............نيلك ;

Page 273, Ligne 19.............. { Signe Positif..............دهن ; Signe Negatif..........رين ; }

Idem......*Ligne 21*...............Inconnue d'une Equation.شي ;

Idem......*Ligne 30*...............Signe du Carré..........مال ;

Idem......*Ligne 31*...............Signe du Cube.........كعب ;

Page 274 Ligne 22.......Inconnues..या, का, नी, पी, लो.

Page 275 Ligne 12..................Nombre..........153, ١٥٣.

Page 277 Fig. 1re

Même Page 277, Figure 2me dite la Fiancée.

Chiffres *(Page 281, Ligne 17.)*

Sanscrits	१ २ ३ ४ ५ ६ ७ ८ ९ ०
Arabes ou Persans	١ ٢ ٣ ٤ ٥ ٦ ٧ ٨ ٩ ٠
Idem	[illegible]
Dans Planude *(Auteur qui florissoit en 1327.)*	[illegible]
Tables Manuscrites de Sacrobosco *(Auteur Anglais Mort en 1256.)*	[illegible]
Européens	1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

Exemple d'une Multiplication *(Page 282, Ligne 24.)*

١٢	12
١٣٥	135
١٢	12
٣٦	36
٦٠	60
١٦٢٠	1626

...rard del. *Adam sc.*

